Feuille de TD 7 : Applications linéaires.

Exercice 1.
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquez leur noyau et leur image. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas d'une application linéaire, indiquer également la matrice associée dans les bases canoniques.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, 3y + x)$
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$
6. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y)$

Exercice 2.
Soient E un espace vectoriel, f et g deux applications linéaires de E dans E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(f \circ g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f \circ g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Exercice 3.
Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\left\{\begin{array}{lcl} \phi(\vec{e_1}) & = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_2}) & = & \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_3}) & = & \vec{e_1} + \lambda\vec{e_3} \end{array}\right.$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 4.
On définit l'application ϕ,

$$\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, 2x + z, 2x + y) \end{array}\right.$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. Écrire la matrice de cet isomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}.$$

Trouver $\phi(F)$.

Exercice 5.

1. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires f_i associées aux matrices A_i suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Quelles sont les applications linéaires f_i qui sont injectives? surjectives? bijetives?

3. Pour chaque i, donner la dimension du noyau et la dimension de l'image de f_i.

Exercice 6.
On considère une application linéaire ϕ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image et le noyau de ϕ et en donner des bases. Quel est le rang de ϕ?

2. Mêmes questions pour l'application linéaire ψ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est la suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. * Calculer les matrices de $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$. Quels sont les noyaux et images des applications $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$?

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y + 2z, y + z - t, 2x + y + 3z + t, 2y + z - t)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{rg}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et $(e_1, e_2; e_3, e_4)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} f(e_1) &= -e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + e_4 \\ f(e_4) &= e_2 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

Déterminer l'isomorphisme $f^2 = f \circ f$. En déduire que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$. En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 9.
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par sa matrice dans les bases canoniques $\mathcal{B}_1$ de E et $\mathcal{B}_2$ de F : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{B}_1' = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ une nouvelle base de E. Écrire la matrice B de u dans les bases $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2$.

2. Soit $\mathcal{B}_2' = \{(1/2,1/2),(1/2,-1/2)\}$ une nouvelle base de F. Écrire la matrice C de u dans les bases $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$.

Exercice 10.
Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x, 4x-y, 2x+3y-z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 11. Plus difficile.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

2. $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

Exercice 12. Plus difficile.
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^n$. On considère f un endomorphisme non nul de E.

1. On suppose $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Prouver que $\dim(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{rg} f = 1$, et trouver une base (u,v) de E telle que $f(u) = v$ et $f(v) = 0$. En déduire que $f \circ f = 0$.

2. On suppose que $f \circ f = 0$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $(u, f(u))$ soit une base de E. En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.