Contrôle continu numéro 2 (1h15)

- Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées.
- Le détail des calculs doit apparaître sur la copie.
- La présentation doit être la plus soignée possible.
- Les temps donnés pour chaque exercice sont indicatifs.
- Les calculatrices sont interdites.
- Ne pas traiter la question BONUS si toutes les autres questions n'ont pas été traitées intégralement (aucun point ne sera attribué).

Exercice 1. Question de cours. (5 min)
Soit $n \geq 1$, donner la définition précise d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et d'une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Sous-espace vectoriel (20 min)

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y + t - z \text{ et } z + y = t\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F et donner une base de F.

Exercice 3. Familles libres et génératrices. (25 min)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{v} = (1,1,1)$, et pour $m \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = (m,2,1)$.

1. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est-elle libre? est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. A quelle condition sur m la famille $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est-elle libre?
3. Dans le cas où m est tel que la famille $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est libre, $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Application linéaire (25 min)

On définit l'application ϕ,

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, 2x+z, 3x-y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire. Écrire la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de ϕ. Cette application est-elle injective?
3. On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$, déterminer la dimension et une base de $\phi(F)$.

Exercice 5. Espaces vectoriels supplémentaires. (BONUS)

On définit deux parties F et G de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + z = 0\} \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = z\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.