

Feuille de TD 4 : Matrices**Exercice 1. Produit de matrices.**

Calculer les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Matrices 2x2.

Soient deux matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices :

$$AB, BA, A^2, B^2, A^2 - B^2, (A + B)(A - B), A^2 + B^2 + 2AB, (A + B)^2.$$

Exercice 3. Matrices nilpotentes.

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5 .

Exercice 4. Associativité du produit matriciel.

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puis $A(BC)$.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 5. Non-commutativité du produit matriciel.

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB .

2. Calculer BA .
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 6. Commutant d'une matrice.

Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Calcul d'inverse.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 .

En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8. Calcul des puissances d'une matrice.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

- (a) Calculer B^2 , B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n , pour tout entier n .
- (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
- (c) En déduire A^n Pour tout entier n .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n , calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 9. Inversibilité.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?

(b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$ (0 étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 10. Calcul pratique du rang d'une matrice.

Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Calcul pratique d'inverse.

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Matrices du type $I + A$.

Soient A une matrice carrée réelle d'ordre $n \geq 0$. On suppose les matrices A et $I_n + A$ inversibles.

1. Montrer que la matrice $I_n + A^{-1}$ est inversible.
2. Montrer que $(I_n + A^{-1})^{-1} + (I_n + A) = I_n$.

Exercice 13. Polynôme annulateur.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur à 2 tel que :

$$P_n(6) = 6^n, P_n(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n \text{ et } P_n(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$

Montrer que $A^n = P_n(A)$.