Feuille de TD 1 : Nombres Complexes

Exercice 1. Mise sous forme algébrique.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants (c'est-à-dire sous forme $x+iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$),

1.
$$(3+2i)(1-i)\ ,\ i^3\ ,\ (a+ib)(c+id) \text{ où } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

2.
$$\frac{1}{2+i}\ ,\ \frac{1}{x+iy} \text{ où } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

3.
$$\frac{3+i}{2+i}\ ,\ \frac{i+5}{(i+3)^2}\ ,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}\ ,\ \frac{a+ib}{b+ia} + \frac{a-ib}{b-ia} \text{ où } a,b \in \mathbb{R}$$

Exercice 2. Mise sous forme algébrique (suite).
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$

$$1+e^{i\theta}\ ,\ re^{i\theta}(1+i)\ ,\ 3e^{i\frac{\pi}{4}}\ ,\ 2e^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Exercice 3. Calcul de module et d'arguments.
Calculer le module et les arguments des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$).

1.
$$1+i\ ,\ 1-i\ ,\ 1+i\sqrt{3}\ ,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$$

2.
$$\frac{1+i}{1-i}\ ,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2009}$$

Exercice 4. Résolution d'équations du second degré.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes,

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2+(4-2i)z-i=0$
3. $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$
4. $z^4-(1-i)z^2-i=0$

Exercice 5. Formules d'Euler.
Démontrer (et retenir) les formules, pour θ réel,

1. $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
2. $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exercice 6. Formules de trigonométrie.
En utilisant les nombres complexes, montrer que :

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Exercice 7. Ensembles de nombres complexes.
Déterminer géométriquement les ensembles,

1. $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}, |z-i| = |z+i|\}$
2. $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |z-(1+2i)| = 4\}$

Exercice 8. Inégalité triangulaire.

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) \leq |z|$.
2. Montrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z_2})$,
3. puis que $|z_1+z_1| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 9. Sommes géométriques.

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer, $(1-z)(\sum_{k=0}^{n} z^k)$.
2. En utilisant la formule de Moivre, Rappel : $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$,
   calculer $C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.