Feuille de TD 8 : Déterminants.

Exercice 1. Calculs de déterminants.

Calculer les déterminants suivants et factoriser quand c'est possible :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 2. Déterminant et produit de matrices.

1. Soit : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $\det B$, $\det C$ et $\det(BC)$. Que remarquez-vous? Cette formule est-elle générale?

2. Rappel : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$.
   Montrer que si A est nilpotente alors $\det(A) = 0$.

Exercice 3. Inverse de matrice et déterminants.

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle relation lie le déterminant d'une matrice inversible et celui de son inverse?

2. Montrer que les matrices précédentes sont inversibles et calculer le déterminant de leur inverse.

Exercice 4. Non linéarité du déterminant.

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$, $\det B$ et $\det(A+B)$. Que remarquez-vous?

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\lambda A)$ et $\lambda \det A$. Que remarquez-vous? Dans le cas général (en dimension n) quelle relation lie $\det(\lambda A)$ et $\det A$.

Exercice 5. Interpretation géomètrique du déterminant.

En dimension 2, deux vecteurs v_1 et v_2 déterminent un parallélogramme. Soit $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 1)$. Calculer l'aire du parallèlogramme associé, ainsi que $|\det(v_1, v_2)|$. Que remarquez-vous?

Exercice 6. Développement du déterminant par rapport aux lignes et aux colonnes.

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ en utilisant un développement par rapport à une ligne bien choisie.

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ en utilisant un développement par rapport à une colonne bien choisie.

Exercice 7. Développement du déterminant par rapport aux lignes et aux colonnes (plus difficile).

Soit :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

où A_n est une matrice de taille $n \times n$. On note $D_n = \det A_n$. Trouver une relation de récurrence vérifier par D_n. En déduire D_n.

Exercice 8. Déterminant d'un endomorphisme.
On considère l'endomorphisme suivant,

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, 2x + z, 3x - y + z) \end{cases}$$

1. Calculer le déterminant de l'endomorphisme ϕ.

2. Que peut on en déduire sur l'injectivité, la surjectivité de l'endomorphisme ϕ ?