Feuille de TD 5 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. Peut-on exprimer $\vec{v_3}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et de $\vec{v_2}$?

Exercice 2. Combinaisons linéaires.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.
Exprimer les 3 vecteurs suivants : $\vec{v_4}(1,0,0)$, $\vec{v_5}(0,1,0)$ et $\vec{v_6}(0,0,1)$ comme des combinaisons linéaires de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.

Exercice 3. Combinaisons linéaires (suite).

Quel est l'ensemble formé par les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, combinaisons linéaires des deux vecteurs $\vec{v_1}(1,0,1)$ et $\vec{v_2}(1,1,0)$? Même question avec les deux vecteurs $\vec{v_3}(1,2,1)$ et $\vec{v_4}(2,1,0)$.

Exercice 4. Espaces vectoriels.

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0\}$; $E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy=0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x=0, y=z\}$; $E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=1\}$.
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy \geq 0\}$; $E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy+y^2 \geq 0\}$.

Exercice 5. Espaces vectoriels (suite).

Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0$ et $2x-y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Espaces vectoriels supplémentaires.

On définit deux parties F et G de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z); x+y+z=0\} \quad G = \{(x,y,z); x=y=z\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et calculer $F \cap G$.
2. Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 7. Espaces vectoriels supplémentaires (suite).

1. On considère les deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$:

   $$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=y=z\} \text{ et } F = \{(0,y,z); y,z \in \mathbb{R}\}.$$

   Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
2. Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,1,1)$. Ce supplémentaire est-il unique?

Exercice 8. Quatre sev de $\mathbb{R}^4$.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \\ E_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E | x_1 = x_2 = 0\}, \\ E_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}, \\ E_4 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E | x_3 = x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que E_1, E_2 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun.
2. Déterminer $E_2 \cap E_4$ et $E_2 + E_4$.
3. Que peut-on dire de E_3?

Exercice 9. Familles libres.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}(1, 0, 1)$, $\vec{v_2}(0, 2, 2)$ et $\vec{v_3}(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1, 0, 0)$, $\vec{v_2}(0, 1, 1)$ et $\vec{v_3}(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}(1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v_2}(2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v_3}(1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v_4}(0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v_2}(1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v_3}(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v_2}(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v_3}(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 10. Familles libres, familles génératrices.

1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $\vec{u} = (1, 2, -5),\ \vec{v} = (2, 1, 0),\ \vec{w} = (-1, 1, 2),\ \vec{x} = (1, 3, 0)$.
   Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère à présent les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (1, -2, 3, 4)$, $\vec{v} = (0, 5, -1, 8)$, $\vec{w} = (-1, 3, 2, -1)$, $\vec{x} = (2, -1, 0, 3)$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-elle libre?

Exercice 11. Théorème de la base incomplète.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Chercher les relations de dépendance linéaire entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 12. Famille de vecteurs avec paramètres.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose, pour $m \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (m + 2, m - 1, 1)$, $\vec{v} = (4, m - 1, 1)$, $\vec{w} = (2, m - 1, 0)$.

1. A quelle condition $(\vec{u}, \vec{v})$ est-elle libre? liée?
2. Même question pour $(\vec{v}, \vec{w})$ et pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.