Contrôle continu numéro 3 (1h15)

- Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées.
- Le détail des calculs doit apparaître sur la copie.
- La présentation doit être la plus soignée possible.
- Les calculatrices sont interdites.
- Ne pas traiter l'exercice bonus si les autres exercices n'ont pas été traités.

Exercice 1. Question de cours 1. VRAI FAUX. (10 min)

Les affirmations 1 à 11 suivantes sont elles Vraies ou Fausses ? Attention une bonne réponse entraine +1 tandis qu'une mauvaise -1. Lorsque que l'on ne connait pas la réponse il est donc conseillé de s'abstenir.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et soient $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{Ker} f$ est un sous espace vectoriel.
2. Si f est surjective alors $dim \operatorname{Ker} f = 1$.
3. Il y a des cas où $dim \operatorname{Ker} f = 0$. ($f$ n'est plus supposée surjective).
4. La matrice de f dans la base canonique à deux colonnes et trois lignes.
5. $\det f$ n'existe pas.
6. 0 est vecteur propre de A.
7. $\det A \in \mathbb{R}^2$.
8. Si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ verifiant $\lambda \neq \mu$ et $\det(\lambda I_2 - A) = \det(\mu I_2 - A) = 0$ alors A est diagonalisable
9. On a nécessairement : $\det(A + B) = \det A + \det B$
10. On a nécessairement : $\det(AB) = \det A \times \det B$
11. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement : $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

Exercice 2. Question de cours 2. (5 min)

Définir proprement pour une matrice A la notion de vecteur propre et de valeur propre.

Exercice 3. Applications linéaires. (20 min)

On fixe un réel m, Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + 2z, 4x - y + 3z, 2x + 3y + (m + 5)z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer le rang de f en fonction de m. En déduire les valeurs de m pour lesquelles f est inversible.
2. Pour ces valeurs de m calculer l'inverse de f (c'est-à-dire f^{-1}).

Exercice 4. Calcul de déterminants. (15 min)

Soient les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de chacune des matrices précédentes.
2. Parmi ces matrices, lesquelles sont inversibles?

Exercice 5. Réduction de matrices. (25 min)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice,

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire les valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
3. Calculer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre. La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
4. Lorsque la matrice est diagonalisable donner une base de vecteurs propres ainsi que les matrices de changement de base qui permettent de passer dans une base dans laquelle la matrice devient diagonale (Donner explicitiment la formule de changement de base).

Exercice 6. BONUS

Soit la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Calculer les valeurs propres de cette matrice (dans $\mathbb{C}$), puis une base de vecteurs propres.