Corrigé du contrôle continu numéro 1

Exercice 1. Question de cours. (5 min)

Enoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices carrées A et B de taille m.
Préciser les conditions de validité de cette formule ainsi que les valeurs des coefficients binomiaux.

Solution 1. Soient m un entier supérieur ou égal à 1, A et B deux matrices de $M_m(\mathbb{R})$ (ou $M_m(\mathbb{C})$) qui commutent (i.e telles que $AB = BA$). Pour tout entier n positif,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Pour deux entiers positifs k et n vérifiant $k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ vaut par définition $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires. (15 min)

Résoudre le système suivant en donnant clairement son ensemble de solutions. Si l'ensemble de solution n'est pas l'ensemble vide, vérifier qu'un des éléments (que vous choisirez au hasard s'il y en a plusieurs) de l'ensemble de solutions que vous avez trouvé est bien solution du système donné.

$$\begin{cases} x+3y+2z &= 1 \\ 2x-2y &= 2 \\ 3x-7y-2z &= 3 \end{cases}$$

Solution 2. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -7 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Le coefficient en position $1,1$ nous sert de pivot, on effectue les opérations suivantes :
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

On traite la deuxième colonne : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

On normalise le pivot de la deuxième ligne (cette étape n'est pas obligatoire) : $L_2 \leftarrow \left(\frac{-1}{8}\right) L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

On élimine les coefficients au dessus des pivots (ici le coefficient en position $1,2$) : $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il s'agit de la forme échelonnée réduite de la matrice, le système (équivalent à notre système de départ) associé à cette matrice est :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$S = \left\{(1 - \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\right\}$$

Un élément de l'ensemble S est le triplet $(1,0,0)$ (pour $z = 0$), on vérifie bien qu'il est solution du système initial.

Exercice 3. Rang de matrices. (20 min)

Déterminer le rang des matrices suivantes, et calculer leur inverse lorsque cela est possible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 3. Première matrice :
Les trois premières lignes de la matrices sont déjà échelonnées. Les lignes 4 et 5 sont à traiter : $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_4$ on obtient la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 4 or la matrice est carrée de taille 5×5, elle n'est donc pas inversible.

Deuxième matrice :
La matrice est déjà sous forme échelonnée. Elle est de rang 3. La matrice n'est pas carrée ! Les questions d'inversibilité n'ont pas de sens pour des matrices non carrées.

Troisième matrice :
On effectue l'algorithme de Gauss pour mettre la matrice carrée sous forme échelonnée réduite. Si cette matrice est inversible alors sa forme échelonnée réduite est la matrice identité. On effectue les mêmes opérations sur la matrice identité.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ etc .... On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Puissance d'une matrice. (20 min)

1. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

2. Soit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En écrivant que $A = 2I_4 + T$ et à l'aide de la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4. Exercice clone de l'exercice 8 du TD4.

1. On calcule :

$$T^0 = I_4, T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^4 = 0$$

(On notera également 0 la matrice nulle).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ définissons la proposition $\mathcal{P}_n$: "$T^n = 0''$.
Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Initialisation : Pour $n = 4$, $\mathcal{P}_4$ est vraie nous avons calculé T^4.
Récurrence : Soit $n \geq 4$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$T^{n+1} = T^n T$. Or T^n est nulle car nous avons supposé $\mathcal{P}_n$ vraie (hypothèse de récurrence). Mais alors $T^{n+1} = 0 \times T$ donc $T^{n+1} = 0$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
D'après le théorème de récurrence on conclue que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 4$, c'est à dire que T^n est la matrice nulle pour tout $n \geq 4$. Avec le travail préliminaire nous avons calculé T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La matrice $2I_4$ commute avec toutes les matrices de taille 4, donc avec la matrice T. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(2I_4 + T)^n &= (T + 2I_4)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (2I_4)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} T^k (I_4)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} T^k
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
(2I_4 + T)^n &= \sum_{k=0}^{3} 2^{n-k} \binom{n}{k} T^k + \sum_{k=4}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} T^k \\
&= \sum_{k=0}^{3} 2^{n-k} \binom{n}{k} T^k
\end{aligned}$$

Car $T^k = 0$ pour tout $k \geq 4$.

$$\begin{aligned}
(2I_4 + T)^n &= 2^n \binom{n}{0} T^0 + 2^{n-1} \binom{n}{1} T^1 + 2^{n-2} \binom{n}{2} T^2 + 2^{n-3} \binom{n}{3} T^3 \\
&= 2^n I_4 + 2^{n-1} n T + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} T^2 + 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} T^3
\end{aligned}$$

On remarque que la formule reste vraie pour $n = 0, 1, 2$ (ce qui n'était pas évident a priori).
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 2^n I_4 + 2^{n-1} nT + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} T^2 + 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} T^3$$

Exercice 5. (BONUS) Résolution d'équation de degré 2 à coefficients complexes.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + (4-2i)z - i = 0$$

Solution 5. $\Delta = (4-2i)^2 + 4i = 12(1-i)$

Il existe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = (1-i)$. Cherchons à déterminer un tel δ.
Ecrivons $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On a les deux équations qui fournissent le système suivant :

$$\begin{cases} \delta^2 & = 1 - i \\ |\delta|^2 & = |1-i| \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} (x+iy)^2 & = 1 - i \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{2} \end{cases}$$

Attention ce n'est pas un système linéaire ! Les méthodes de résolution donnant des systèmes équivalents (Gauss) ne sont plus valides. Nous allons raisonner par condition nécessaire, nous devrons vérifier qu'un résultat obtenu est effectivement solution du système de départ. On développe le carré présent dans la ligne puis on additionne les deux lignes, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2ixy & = 1 + \sqrt{2} - i \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{2} \end{cases}$$

Nécessairement $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{-1}{2x}$.
On ne cherche qu'une solution prenons $\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{2}}}$.
On vérifie que $\delta^2 = 1 - i$ (puisque nous avons raisonné par condition nécessaire).
On a $\Delta = \left(2\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{2}}}\right)\right)^2$. Les solutions de l'équation sont donc (d'après les formules connues).

$$z = (-2+i) \pm \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{2}}}\right)$$