

Contrôle continu numéro 1 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Les temps donnés pour chaque exercice sont indicatifs.

Exercice 1. Question de cours. (5 min)

Enoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices carrées A et B de taille m . Préciser les conditions de validité de cette formule ainsi que les valeurs des coefficients binomiaux.

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires. (15 min)

Résoudre le système suivant en donnant clairement son ensemble de solutions. Si l'ensemble de solution n'est pas l'ensemble vide, vérifier qu'un des éléments (que vous choisirez au hasard s'il y en a plusieurs) de l'ensemble de solutions que vous avez trouvé est bien solution du système donné.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ 3x - 7y - 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 3. Rang de matrices. (20 min)

Déterminer le rang des matrices suivantes, et calculer leur inverse lorsque cela est possible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Puissance d'une matrice. (20 min)

1. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

2. Soit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En écrivant que $A = 2I_4 + T$ et à l'aide de la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. (BONUS) Résolution d'équation de degré 2 à coefficients complexes.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$z^2 + (4 - 2i)z - i = 0$$