Corrigé du contrôle continu numéro 2

Exercice 1. Question de cours.

Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est libre si pour toute famille de scalaire $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$$

(Remarque : on a alors nécessairement $m \leq n$)

Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ si pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, il existe une famille de scalaire $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ telle que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ (on peut également dire que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, v peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, ... et v_m) (Remarque : on a alors nécessairement $n \leq m$)

Une base de $\mathbb{R}^n$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à la fois libre est génératrice. (Remarque : Une base de $\mathbb{R}^n$ a donc nécessairement n éléments)

Exercice 2. Sous-espace vectoriel

1. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on montre que :
   (a) $\mathbf{0} \in F$ (pour cela on vérifie que $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ vérifie bien les équations qui définissent F).
   (b) si $u_1 \in F$ et $u_2 \in F$ alors $u_1 + u_2 \in F$ (Pour cela on choisit $u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in F$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in F$. Les coordonnées de ces deux vecteurs vérifient les équations qui définissent F puisqu'ils sont dans F. On montre alors que les coordonnées de $u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2)$ vérifient bien les équations qui définissent F).
   (c) si $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u \in F$ (On procède de même que dans le point précédent en choisissant $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).
2. F est, par définition, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ y + z - t \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

On résoud donc ce système par la méthode du pivot de Gauss et on obtient :

$$F = \{(-3z + 3t, -z + t, z, t) | (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Cet espace est de dimension 2 et une base de F est $((-3, -1, 1, 0), (3, 1, 0, 1))$.

Exercice 3. Familles libres et génératrices.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, et pour $m \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = (m, 2, 1)$.

1. Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels tel que $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = 0$. On a alors $(2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = 0$. On en déduit $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc libre. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ n'a que deux vecteurs, or $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc cette famille ne peut pas être génératrice.
2. Par définition, la famille $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est libre si et seulement si la seule possibilité pour que $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = 0$ est que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'expression $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = 0$ peut se réécrire comme un système d'inconnus λ_1, λ_2 et λ_3 :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \quad = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

En échelonnant la matrice augmentée de ce système, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & m-4 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Remarque : on peut obtenir une matrice différente, mais le résultat reste le même). Pour que la solution de ce système soit unique (ce sera alors la solution nulle : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$), la matrice doit comporter trois pivots, ce qui est le cas quand $m - 3$ n'est pas égal à 0. On en déduit donc que la famille $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est libre si et seulement $m \neq 3$.

3. Si la famille $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est libre, alors il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3. Cette famille est donc aussi génératrice et il s'agit d'une base.

Exercice 4. Application linéaire

1. Pour montrer que ϕ est une application linéaire, on doit montrer que :
   (a) pour tout $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, on a $\phi(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = \phi(x_1, y_1, z_1) + \phi(x_2, y_2, z_2)$.
   (b) pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda\phi(x, y, z)$.

2. Le noyau de ϕ est l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi(x, y, z) = 0$. C'est donc l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x - y \qquad = 0 \\ 2y + z \qquad = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

   On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système et on obtient :

$$Ker\phi = \{(-\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}z, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

   Le noyau de ϕ n'est pas réduit au vecteur nul donc cette application n'est pas injective.

3. F est, par définition, l'ensemble des solutions d'un système à une seule équation. La résolution de ce système permet de montrer que F et de dimension 2. Une base de F est alors par exemple $((0, 1, -1), (1, -2, 0))$. On sait alors que $(\phi(0, 1, -1), \phi(1, -2, 0))$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\phi(F)$. $((-1, -1 - 2), (3, 2, 5))$ est donc une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\phi(F)$. On montre alors comme dans l'exercice 3 que cette famille est aussi libre. $((-1, -1 - 2), (3, 2, 5))$ est donc une base de $\phi(F)$.