Devoir maison (facultatif mais très conseillé)

Consignes :

- Ce devoir n'est pas obligatoire, mais il est très fortement conseillé de le faire, au moins en partie : il ne reste en effet que très peu de séances de TD avant l'examen et l'examen, contrairement aux deux premières interrogations de contrôle continu, ne contiendra pas d'exercices déjà traités en TD.
- Vous pouvez travailler à plusieurs mais vous rendrez une copie par personne, et la rédaction des solutions doit être personnelle.
- Vous pouvez ne traiter qu'une partie des exercices.
- Si vous bloquez complètement sur un exercice, si vous ne comprenez pas le sujet d'un exercice, ou pour tout autre question, vous pouvez nous demander des indications par mail à l'adresse : *lm120.ipcm@gmail.com*.
- Le devoir est à rendre (pour ceux qui désirent le rendre) le Mercredi 29 avril.

Exercice 1.

1. On donne les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:
$$\mathcal{S}_1 = \{(3,1),(2,3)\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(0,2),(0,-1)\}, \quad \mathcal{S}_3 = \{(3,2),(4,-1),(5,-2)\}.$$
Reconnaître les familles libres, les familles génératrices de $\mathbb{R}^2$ et les bases de $\mathbb{R}^2$.
2. On se donne quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{x} = (1,3,4),\ \vec{u} = (1,-1,1),\ \vec{v} = (0,-1,2),\ \vec{w} = (1,-1,3).$$
On considère les quatre familles de vecteurs :
$$\mathcal{S}_1 = \{\vec{u},\vec{v}\},\ \mathcal{S}_2 = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\},\ \mathcal{S}_3 = \{\vec{x},\vec{u},\vec{v}\},\ \mathcal{S}_4 = \{\vec{x},\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}.$$
Déterminer pour chacune d'elles si c'est une famille libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{u}_1 = (1,-2,1),\ \vec{u}_2 = (1,-3,1), \text{ et } \vec{u}_3 = (2,-4,3).$$
Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
Si oui, calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (a,b,c)$.
4. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$:
$$\vec{v}_1 = (2,3,-1,4),\ \vec{v}_2 = (1,-2,3,2), \text{ et } \vec{v}_3 = (3,0,2,3).$$
forment-ils une famille libre? Si oui, compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

On considère $u = (1, -3, 2)$ et $v = (2, -1, 1)$. Trouver une condition liant a, b et c telle que $w = (a, b, c)$ soit combinaison linéaire de u et v.

Exercice 3.

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

1. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver les coordonnées du vecteur $v = (3, 1, 4)$ relativement à la base (v_1, v_2, v_3).
3. Trouver la matrice P_1 de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3).
4. Trouver la matrice P_2 de passage de la base (v_1, v_2, v_3) à la base canonique.
5. Vérifier que $P_1 P_2 = I_3$.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et $(e_1, e_2; e_3, e_4)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & -e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_2) & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) & = & e_1 + e_4 \\ f(e_4) & = & e_2 - e_3 + e_4 \end{array}\right.$$

Déterminer l'isomorphisme $f^2 = f \circ f$. En déduire que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. En déduire que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 5.

Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 6.

Soient E un espace vectoriel, f et g deux applications linéaires de E dans E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(f \circ g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f \circ g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.