Feuille de TD 6 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (suite)

Exercice 1.
Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier soigneusement les réponses.

1. Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est toujours génératrice.
2. Une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ est composée d'au moins 3 vecteurs.
3. Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours une famille génératrice.
4. Une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours une famille libre.
5. Une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours liée.

Exercice 2.

1. Déterminer les réels x et y tels que $(0,1) = x(3,1) + y(2,4)$.
2. Déterminer les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ sachant que $\vec{v} + \vec{w} = (2,1)$ et $\vec{v} - \vec{w} = (1,2)$.
3. Soient un réel m et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1,1,1)$ et $\vec{v} = (1,m,1)$. A quelle condition sur m, le vecteur $(m,1,m)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 3.
Soit F le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \\ x - t &= 0 \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 4.
Montrer que les sous-espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$G = \{(x+2y, 2x+3y, -x, -2x-y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\},$$
$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 3x - z = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}.$$

Déterminer une base et la dimension de chacun des sous espaces G, H, $G \cap H$ et $G + H$.

Exercice 5.
On considère les deux sous-parties de $\mathbb{R}^4$ suivantes :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = y \text{ et } z = t\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et déterminer pour F et pour G une base de l'ensemble. Donner leur dimension.

Exercice 6.

1. On donne les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(3,1),(2,3)\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(0,2),(0,-1)\}, \quad \mathcal{S}_3 = \{(3,2),(4,-1),(5,-2)\}.$$

Reconnaître les familles libres, les familles génératrices de $\mathbb{R}^2$ et les bases de $\mathbb{R}^2$.

2. On se donne quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = (1,3,4),\ \vec{u} = (1,-1,1),\ \vec{v} = (0,-1,2),\ \vec{w} = (1,-1,3).$$

On considère les quatre familles de vecteurs :

$$\mathcal{S}_1 = \{\vec{u},\vec{v}\},\ \mathcal{S}_2 = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\},\ \mathcal{S}_3 = \{\vec{x},\vec{u},\vec{v}\},\ \mathcal{S}_4 = \{\vec{x},\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}.$$

Déterminer pour chacune d'elles si c'est une famille libre? génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$?

3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1,-2,1),\ \vec{u}_2 = (1,-3,1), \text{ et } \vec{u}_3 = (2,-4,3).$$

Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Si oui, calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (a,b,c)$.

4. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 = (2,3,-1,4),\ \vec{v}_2 = (1,-2,3,2), \text{ et } \vec{v}_3 = (3,0,2,3).$$

forment-ils une famille libre? Si oui, compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7.
On considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y-z=0\}$.

- Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Soient $\vec{u} = (2,-1,0)$ et $\vec{v} = (0,1,2)$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une famille libre qui engendre F.
- Soit $\vec{s} = (1,1,3)$. Montrer que $\vec{s} \in F$ et exprimer $\vec{s}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Exercice 8.
On considère les vecteurs

$$\vec{u} = (2,-1,0),\ \vec{v} = (0,1,2),\ \vec{w} = (1,1,3),\ \vec{t} = (1,-1,-1).$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{w},\vec{t})$.

Exercice 9. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{u} = (3,7,0)$ et $\vec{v} = (5,0,-7)$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{x} = (2,3,-1)$ et $\vec{v} = (1,-1,-2)$.

Montrer que $F = G$.