LM-115 Suites et intégrales, MIME, deuxième semestre 2010-2011
Université Pierre et Marie Curie

# Chapitre 1 : Introduction au langage mathématique, théorie des ensembles.

## Un peu de logique.

**Exercice 1**

1. Soient $P$ et $Q$ deux propositions. Ecrire la négation des propositions suivantes : $P$ et $Q$, $P$ ou $Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, $P \Rightarrow (Q$ et $R)$.
2. Montrer la proposition suivante :

$$(1 = 2) \Rightarrow (3 = 4)$$

**Exercice 2**
Soient $A$, $B$, $C$ trois propositions. Montrer grâce à une table de vérité la proposition :

$$A \text{ et } (B \text{ ou } C) \Longleftrightarrow (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C).$$

Résoudre le système suivant, pour $x$ réel :

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) = 0 \\ x(2x+1) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3**
Considérons l'énoncé suivant : "on ne peut voter sans être majeur".

1. L'énoncer avec le signe $\Rightarrow$, puis écrire sa contraposée.
2. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?
   a) Paul a voté, donc Paul est majeur.
   b) Pierre n'a pas voté, donc Pierre n'est pas majeur.
   c) Carole est majeure, donc Carole a voté.

**Exercice 4** *Conditions nécessaires, conditions suffisantes*

1. Soit $x$ un nombre réel. Donner une condition suffisante, mais non nécessaire, pour avoir $x^2 \geq 1$. Donner une condition nécessaire, mais non suffisante, pour avoir $x^2 \geq 1$.
2. Que penser de la phrase : "Pour qu'une fonction soit continue, il faut qu'elle soit dérivable" ?

## Quantificateurs.

**Exercice 5**
Ecrire les négations des phrases suivantes :

1. Dans toutes les écuries, il y a au moins un cheval noir.
2. Dans toutes les écuries, il y a exactement un cheval noir.

3. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

**Exercice 6**

On considère la proposition suivante

$$P(x, y) : x \text{ est la fille de } y.$$

Traduire en termes mathématiques les phrases suivantes :

1. Toute femme a une mère.
2. Il existe une femme qui est la mère de toutes les autres femmes.
3. Toute femme est fille de toute femme.
4. Toute femme a au moins deux filles.

**Exercice 7**

Parmi les propositions suivantes, dire lesquelles sont vraies ; on écrira la négation des propositions fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = -1) \Rightarrow (x^2 = 7)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x) \Rightarrow x \geq 0$.
5. $\exists m \in \mathbb{N}$, non$(m \neq 1$ ou $m \neq 4)$.
6. $\forall z \in \mathbb{C},\ (z = \bar{z}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R})$.

**Exercice 8**

1. On considère la proposition

   $$P_1 : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{N},\ n \leq M$$

   Retranscrire $P_1$ en bon français, et dire si $P_1$ est vraie ou fausse.
2. Même chose avec

   $$P_2 : \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq M$$

   Conclusion ?

**Exercice 9**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Traduire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle.

**Méthodes de raisonnement.**

**Exercice 10**

1. Montrer que pour tout entier $n$, si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair.
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. (Plus difficile) Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Montrer que pour tout nombre premier $p$, $\sqrt{p}$ est irrationnel.

**Exercice 11**

On considère 7 réels $x_1$, ..., $x_7$ tels que

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 0$$

Montrer qu'il existe un $i$ tel que $x_i \leq 0$.

**Exercice 12**

1. Soit $a$ un nombre réel tel que pour tout $\epsilon > 0$, on ait $|a| \leq \epsilon$. Montrer que $a = 0$.
2. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que pour tout $\epsilon > 0$, on ait $a \leq b + \epsilon$. Montrer que $a \leq b$.

**Exercice 13**

1. Pour $n$ entier naturel, comparer $2^n$ et $n!$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Exercice 14**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donner la négation des propositions suivantes :

1. $f$ est croissante.
2. $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$.
3. $f$ est croissante et positive.
4. Il existe $x$ réel tel que $f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.

**Opérations sur les ensembles.**

**Exercice 15**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Tous les sous-ensembles de $E \times F$ sont-ils de la forme $A \times B$, avec $A \subset E$ et $B \subset F$ ?

**Exercice 16**

Montrer les formules suivantes, où $A$, $B$, $C$ sont des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
3. $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$.
4. $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$.
5. $A \cup (B - A) = A \cup B$.
6. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

**Applications.**

**Exercice 17**

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles $E$ et $F$. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ? On justifiera.

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

**Exercice 18**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles ; soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer

1. Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

**Exercice 19**

Montrer que la composée de deux applications injectives est injective. Même chose avec la surjectivité.

**Exercice 20**

1. Soit $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ l'application définie par $f(m, n) = \dfrac{m}{n}$. Est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Même question avec $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par $f(m, n) = m + \dfrac{1}{n+1}$.

**Exercice 21**

On définir $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(a, b) = a + b\sqrt{2}$. Montrer que $f$ est injective mais pas surjective.

**Exercice 22**

Construire une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. On construira si possible la bijection réciproque.

**Exercice 23**

On définir $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(a, b) = a + b\sqrt{2}$. Montrer que $f$ est injective mais pas surjective.