LM-115 Suites et intégrales, MIME, deuxième semestre 2010-2011
Université Pierre et Marie Curie

# Chapitre 2 : Nombres réels.

## Borne supérieure, borne inférieure.

**Exercice 1**
Pour les ensembles suivants, dire s'ils admettent ou non des bornes inférieures / supérieures dans $\mathbb{R}$ et les calculer. Même question avec plus grand élément / plus petit élément.

$$A = [0,1], \quad B = [-1,1[, \quad C = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad D = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$E = \mathbb{Q} \cap [0,+\infty[, \quad F = \mathbb{Q} \cap ]0,+\infty[, \quad G = \mathbb{N}$$

**Exercice 2**
Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in A\,, \forall y \in B, x \leq y$$

1. Montrer que $a = \sup(A)$ et $b = \inf(B)$ existent et qu'on a $a \leq b$.
2. Montrer qu'on a

$$\sup(A) = \inf(B) \iff \forall \epsilon > 0\,, \exists x \in A\,, \exists y \in B\,, y - x \leq \epsilon$$

**Exercice 3**
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction. On veut prouver que si $f$ est croissante alors elle a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un $a$ dans $[0,1]$ qui vérifie $f(a) = a$.

1. Soit $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq x\}$. Montrer que $A$ a une borne inférieure $a \geq 0$.
2. Montrer que $f(a)$ est un minorant de $A$.
3. En déduire que $f(a) \leq a$ et que $f(a) \in A$.
4. Conclure.

## Rationnels, partie entière, approximation.

**Exercice 4**
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe deux irrationnels $a$ et $b$ tels que $a^b$ soit rationnel.

1. Montrer ce résultat en supposant que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel.
2. Supposons maintenant que $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel. Trouver un irrationnel $b$ tel que $a^b$ soit rationnel.
3. Conclure. Savez-vous si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ?

**Exercice 5** [Autour de la valeur absolue]

1. Montrer que si $x$ et $y$ sont deux réels, alors

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

2. Montrer que pour tout réel $x$ on a $|x|^2 = x^2$.
3. Montrer que pour tous réels $x$ et $y$ on a $|xy| = |x||y|$.
4. Montrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ , |x+y| \leq |x| + |y|$$

5. Montrer que pour $r \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.
6. Montrer la variante suivante de l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ , ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

**Exercice 6**

1. Rappeler la définition de la partie entière d'un réel.
2. A-t-on toujours $E(x+y) = E(x) + E(y)$ pour $x$ et $y$ réels ? Donner un encadrement de $E(x+y) - E(x) - E(y)$.
3. Etudier la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = E(x) + E(\frac{1}{x})$.

**Exercice 7** [Approximation décimale]

1. Soit $x$ un réel. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ il existe un entier relatif $a_k$ tel que
$$a_k 10^{-k} \leq x < a_k 10^{-k} + 10^{-k}$$
2. Montrer que la suite définie pour $k \geq 0$ par $x_k = 10^{-k} a_k$ converge vers $x$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 8** [Densité de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$]

1. Soient $a$ et $b$ deux rationnels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que
$$a < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$$
2. Montrer que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. A votre avis, y a-t-il plus de rationnels ou d'irrationnels dans $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 9**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que pour tous réels $x$ et $y$ on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que pour tout réel $x$ on ait $f(x) = \alpha x$.