LM-115 Suites et intégrales, MIME, deuxième semestre 2010-2011
Université Pierre et Marie Curie

Chapitre 5 : Intégration.

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes à l'aide de l'intégration par parties

1. $\int_0^1 \arctan(t)dt$
2. $\int_0^1 x\cos(x)dx$
3. $\int_1^x t^n \ln(t)dt$ où n est un entier relatif différent de -1.
4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)dx$
5. $\int_0^1 (x^2+x+1)e^x dx$
6. $\int_0^1 \dfrac{u}{\sqrt{1+u}}du.$

Exercice 2 [Intégrales de Wallis]
Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3.
2. Soit n un entier. En utilisant une intégration par parties montrer que
$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$
et exprimer W_{n+2} en fonction de W_n.
3. Calculer W_{2k} et W_{2k+1} en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que (W_n) est décroissante et strictement positive.
5. En exploitant l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$$
6. On pose $u_n = nW_nW_{n+1}$. Montrer par récurrence que pour tout n on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}\pi$.
7. En conclure un équivalent simple de (W_n).[On appelle équivalent d'une suite (u_n) une suite (α_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\alpha_n} = 1$]

Exercice 3
Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Justifier l'existence de u_n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.
4. Montrer que pour tout entier n on a

$$u_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}$$

5. Montrer que la suite $(2nu_n)$ converge vers 1. On dit que u_n est équivalent à $\frac{1}{2n}$.

Exercice 4
On pose pour tout entier n

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 5
Calculer, à l'aide d'un ou plusieurs changements variables, les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_e^x \frac{dt}{t\ln^2(t)}$ où x est un réel, $x > e$
2. $I_2 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3}dt$ (on posera $u = \frac{1}{t}$).
3. $I_3 = \int_2^3 \ln(t^{\frac{1}{3}} - 1)dt$ (on posera $u = t^{\frac{1}{3}}$).
4. $I_4 = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ où x est un réel, $x > 1$ (on posera $u = \sqrt{1+t}$).

Exercice 6
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. On pourra introduire la fonction $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 7
Réduire en éléments simples et calculer des primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$
2. $g(x) = \frac{x^3-x^2-3x+4}{x^2-2x+1}$
3. $h(x) = \frac{x+3}{x^2-3x-40}$

4. $k(x) = \dfrac{10x^2 + 12x + 20}{x^3 - 8}$
5. $l(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

Exercice 8
Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes :

1. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2 + 2}$
2. $\int_0^1 \dfrac{3x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$

Exercice 9
Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
Même chose avec la suite (v_n) définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Exercice 10
Soit f dérivable sur $[a, b]$ et $M > 0$ tels que

$$f(a) = f(b) = 0, \ \ \forall x \in [a, b], \ |f'(x)| \leq M.$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M \left(b - a\right)^2}{4}.$$

Exercice 11
Soit f une fonction contiune sur $[a, b]$ telle que pour toute fonction g continue sur $[a, b]$ on ait

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.