LM-115 Suites et intégrales, MIME, deuxième semestre 2010-2011
Université Pierre et Marie Curie

Chapitre 6 : Calcul intégral.

Exercice 1
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$I_1 = \int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)^2 dt$, $\quad I_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\,(x - 2\sqrt{x})\,dx$, $\quad I_3 = \int_1^2 3^u du$,

$I_4 = \int_1^4 \frac{1}{y\sqrt{y}} dy$, $\quad I_5 = \int_0^1 (2z-1)\exp(z^2 - z)dz$, $\quad I_6 = \int_1^2 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} da$, $\quad I_7 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} dc$, $\quad I_8 = \int_1^e \frac{(\ln b)^5}{b} db$, $\quad I_9 = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2} dt$, $\quad I_{10} = \int_e^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma$,

$I_{11} = \int_0^2 \beta^4 \exp(-\beta^5) d\beta$, $\quad I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1-\alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha)^4} d\alpha$, $\quad I_{13} = \int_0^2 x^2(x^3+1)^{3/2} dx$,

$I_{14} = \int_0^1 \frac{s^{2004}}{(1+s^{2005})^{2006}} ds$, $\quad I_{15} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta$, $\quad I_{16} = \int_{-4}^4 \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du$, $\quad I_{17} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} dv$, $\quad I_{18} = \int_0^1 \frac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} dy$

Résultats : $I_1 = 34/2$, $I_2 = -16/5$, $I_3 = 6/\ln 3$, $I_4 = 1$, $I_5 = 0$, $I_6 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $I_7 = \frac{4}{5}\ln\left(\frac{2+6\sqrt{2}}{5}\right)$, $I_8 = 1/6$, $I_9 = 1/2\ln(4/3)$, $I_{10} = 2\ln 3 + 4$, $I_{11} = 1/5 - 1/5e^{-32}$, $I_{12} = 0$, $I_{13} = 483/15$, $I_{14} = 1/(2004.2005)(1 - 1/(2^{2004}))$, $I_{15} = 2(e-1)/e^2$, $I_{16} = 0$, $I_{17} = 1/6e^{-1} - 1/6e^{-3}$, $I_{18} = 9/70$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$A = \int_{-1}^1 xe^{3x} dx$, $\quad B = \int_0^1 (t^2+t)e^{2t} dt$, $\quad C_n = \int_1^e u^n \ln(u) du$, $\quad D = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv$,

$E = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\, ds$, $\quad F = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)^3} dt$, $\quad G = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln(x) dx$, $\quad H = \int_0^1 y^4 e^y dy$, $\quad I = \int_1^e z^2(\ln z)^3 dz$, $\quad J = \int_0^1 (3x+1)^3 \ln(3x+1) dx$, $\quad K = \int_1^e \ln y\, dy$,

$L = \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$, $\quad M = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) ds$, $\quad N = \int_0^{1/2} (1-2x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

Résultats : $A = \frac{4}{9}e^{-3} + \frac{2}{9}e^3$, $B = \frac{e^2}{2}$, $C_n = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$, $D = 3/8$, $E = \frac{16}{\sqrt{3}}\ln 4 - \frac{28}{3\sqrt{3}}$, $F = \frac{1}{9} - \frac{\ln 3}{36}$, $G = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8}$, $H = 9e - 24$, $I = \frac{4e^3+2}{27}$, $J = \frac{64}{3}\ln 4 - \frac{85}{16}$, $K = 1$, $L = 3\ln 3 - 4\ln 2$, $M = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$, $N = \frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$.

Exercice 3
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x} dx$

a) par intégration par partie b) en posant le changement de variable $x = 1/t$
Résultat : cette intégrale est nulle.

Exercice 4

A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 w\sqrt{3w+1}dw \quad (z = 3w+1), \quad B = \int_1^e \frac{\ln t}{t}dt \quad (x = \ln t), \quad C = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \quad (v = e^x),$

Pour E et C, utiliser : $1/[\alpha(\alpha-1)] = 1/(\alpha-1) - 1/\alpha$ et $1/[\alpha(\alpha+1)] = 1/\alpha - 1/(\alpha+1)$

$D = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad (t = \frac{x}{x+1}), \quad E = \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} \quad (\alpha = s^3+1),$

$F = \int_{-1}^0 \frac{u^3du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}} \quad (v = u^2+1), \quad G = \int_0^3 \frac{t.\ln(t^2+1)}{t^2+1}dt \quad (x = t^2+1)$

Résultats : $A = \frac{116}{135}$, $B = 1/2$, $C = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$, $D = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2}$, $E = \frac{3\ln 4 - 2\ln 3}{3}$, $F = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $G = \frac{(\ln 10)^2}{4}$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1}, \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+ix}dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x-1)^2}dx.$

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes. On précisera quel(s) intervalle(s) cela est possible.

$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}, \quad \int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx, \quad \int \frac{\cos(x)}{\cos(2x)}dx, \quad \int \frac{\tan(x)}{1+\sin^3(x)}dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}dx, \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

On pourra faire un CDV $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\int chx \sin(2x)dx$, $\int \ln(1+x+x^2)dx$, $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$