LM-115 Suites et intégrales, MIME 24.1, deuxième semestre 2010-2011
Université Pierre et Marie Curie

Correction DM.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \geq A \text{ et } y \geq A \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
Dans le cadre des suites, que fait on lorsque l'on n'a aucune idée de "la limite" ?

Correction

Nous n'avons pas de "candidat naturel" pour la limite. Dans ce cas et dans le cadre des suites on utilise fréquemment les suites dites de Cauchy. On va donc se diriger naturellement vers un critère de convergence séquentiel.
Le cours nous donne le théorème de convergence séquentiel suivant :
f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si **pour tout suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} +\infty$, la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} +\infty$ (**et ne vérifiant rien d'autre**).
Montrons que $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ et $y \geq A$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Par ailleurs $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} +\infty$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$.
Finalement pour tout $n \geq N$ et tout $m \geq N$, on a donc $u_n \geq A$ et $u_m \geq A$ et par conséquent $|f(u_n) - f(u_m)| \leq \varepsilon$.

La suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est une suite réelle de Cauchy et donc $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est une suite convergente.

Exercice 2
Soit f et g fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(f(x), g(x))$.
2. Montrer que l'hypothèse f, g dérivables n'implique pas que l'application précédente soit dérivable.

Correction
1. **Méthode 1.**
Cette méthode est la plus élégante et ne fait pas intervenir des "ε".
Remarquons que nous avons l'égalité fonctionnelle suivante

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

En effet soit $x \in \mathbb{R}$.
1er cas. $f(x) \geq g(x)$.

on a donc d'une part $\max(f,g)(x) = \max(f(x),g(x)) = f(x)$ et d'autre part $\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = f(x)$.
2e cas. $f(x) < g(x)$.
d'une part $\max(f,g)(x) = g(x)$ et d'autre part $\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = g(x)$.

Attention à ne pas confondre cette distinction de cas (où l'on a bien tous les cas) et les deux conditions : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq g(x)$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$ *qui sont bien plus restrictives et donc très différentes !*

L'application $|f-g|$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonction continue. Finalement $\max(f,g)$ est continue comme somme de fonctions continues.

Méthode 2 "chirurgicale".
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrons que $\max(f,g)$ est continue en x_0. On pose $\psi = f - g$.
1er cas. $f(x_0) < g(x_0)$
On a $\psi(x_0) < 0$ donc comme ψ est continue en x_0 (comme somme de fonctions continues) on sait que ψ est strictement négative au voisinage de x_0. C'est-à-dire il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \eta_1$, $\psi(x) < 0$ i.e. $f(x) < g(x)$ (on a donc $\max(f(x),g(x)) = g(x)$).

Soit $\varepsilon > 0$.
comme g est continue en x_0 il existe η_2 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \eta_2$ on ait $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.
On pose $\eta_3 = \min(\eta_1, \eta_2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \eta_3$ on a $|\max(f(x),g(x)) - \max(f(x_0),g(x_0))| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.
$\max(f,g)$ est donc continue en x_0.
2er cas. $f(x_0) > g(x_0)$
Ce cas se traite de manière analogue au premier cas. On utilise ici le fait que $\psi(x_0) > 0$.
3eme cas. $f(x_0) = g(x_0)$
Remarquons que $\max(f(x_0),g(x_0)) = f(x_0) = g(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
comme g est continue en x_0 il existe η_4 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \eta_4$ on a $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.
De même f est continue en x_0 il existe η_5 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \eta_5$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ On pose $\eta_6 = \min(\eta_4, \eta_5)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x - x_0| < \eta_6$, $|\max(f(x),g(x)) - \max(f(x_0),g(x_0))| = |f(x) - f(x_0)|$ ou $|\max(f(x),g(x)) - \max(f(x_0),g(x_0))| = |g(x) - g(x_0)|$. Dans tous les cas $|\max(f(x),g(x)) - \max(f(x_0),g(x_0))| < \varepsilon$ et $\max(f,g)$ est donc continue en x_0.

Finalement nous avons traité tous les cas possible et donc $\max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. **La réponse à cette question consiste à trouver un contre exemple**. On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto -x$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ pourtant $\max(f,g)(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction valeur absolue n'est pas une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en 0.