Contrôle continu numéro 1 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. Question de cours.

1. Donner la définition de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Donner une caractérisation (avec des ε ...) de la borne inferieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Si E et F sont deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction définir, pour la fonction f, les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité.
3. Donner un exemple de fonction injective, non surjective $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Donner un exemple de fonction surjective, non injective de $f_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$. Justifier.

Exercice 2. Une formule à démontrer par récurrence.
Soit $a \neq 1$. Montrer (très proprement) par récurrence sur n la formule :

$$1 + a + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Que dire du cas $a = 1$?

Exercice 3. A propos des sup et des inf.
Les ensembles suivantes ont-il une borne inférieure/supérieure ? Justifier et les calculer quand elles existent. On précisera si ces bornes sont des plus petit élément/plus grand élément.

1. $A = \mathbb{N}$
2. $B =]0, 1[\cup \{2\}$

Exercice 4. Quantificateurs, négations etc...
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriéte (LM) si et seulement si

$$\exists A > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall x > 0, \ (x < \delta \Rightarrow f(x) < A).$$

1. Pour une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, écrire la négation de la propriété (LM).
2. Parmi les fonctions suivantes f_1, f_2 et f_3 lesquelles vérifient la propriété (LM) ? Justifier.

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & cos(x) \end{array}$$

Aide pour le cas de la fonction f_2 : Pour un certain $A > 0$ et $\delta > 0$ on pourra considérer un réel $x_0 < \min(\frac{1}{A}, \delta)$...