Corrigé contrôle continu numéro 1

Exercice 1. Question de cours.

1. cours.
2. cours
3. Définissons

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x,0). \end{array}$$

f_1 est un application injective. En effet soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ alors $(x_1,0) = (x_2,0)$ et donc $x_1 = x_2$. L' application est non surjective : $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ n'a pas d'antécédent par f_1.

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

f_2 est surjective, en effet, soit $y \in [0,+\infty[$ on a $y = f_2(\sqrt{y})$. f_2 n'est pas injective, -1 et 1 ont même image par f_2.

Exercice 2. Une formule à démontrer par récurrence.
On fixe a un réel différent de 1. Definissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$1 + a + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$".
Initialisation.
Initialisons au rang 0. $\mathcal{P}(0)$ est vraie : le membre de gauche vaut 1 tandis que celui de droite est égal à $\frac{1-a^1}{1-a} = 1$.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} 1 + a + ... + a^{n+1} &= 1 + a + ... + a^n + a^{n+1} \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1-a^{n+1} + (1-a)a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} \\ &= \frac{1-a^{n+2}}{1-a}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion.
D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas $a = 1$, on peut écrire la formule $1 + 1^1 + ... + 1^n = n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. A propos des sup et des inf.

1. $A = \mathbb{N}$, est non majoré donc A ne peut avoir de borne supérieure et a fortiori de plus grand élément. A est minoré et non vide donc A admet une borne inférieure. 0 est un minorant et $0 \in A$ donc 0 est le plus petit élément et la borne inférieure de A.
2. $B =]0,1[\cup \{2\}$. B est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure. 2 est un majorant et $2 \in B$ donc 2 est la borne supérieur et le plus grand élément de B. B est non vide et minoré, il admet donc une borne inférieure. On a, pour tout $x \in B$, $x \geq 0$ et pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{\varepsilon}{2} < 0 + \varepsilon$, et $\frac{\varepsilon}{2} \in B$. 0 vérifie donc la caractérisation de la borne inférieure donc $\inf(B) = 0$. En revanche, B n'admet pas de plus petit élément car sinon on aurait $\min(B) = \inf(B) = 0 \in B$ ce qui est impossible.

Exercice 4. Quantificateurs, négations etc...
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriéte (LM) si et seulement si

$$\exists A > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall x > 0, \ (x < \delta \Rightarrow f(x) < A).$$

Cette propriété décrit le caractère "localement majoré au voisinage de 0" d'une fonction.

1. La négation de la propriété (LM) s'écrit

$$\forall A > 0 \ \forall \delta > 0; \exists x > 0, \text{ tel que } x < \delta \text{ et } f(x) \geq A).$$

2. – $\forall 0 < x \leq 2, x^2 \leq 4 < 5$, donc f_1 vérifie la propriété (LM). 5 *joue le rôle de* A *et* 2 *celui de* δ*, bien sûr il y avait beaucoup d'autres choix possibles.*

   – Montrons que f_2 ne vérifie pas la propriété (LM) on va donc montrer que f_2 vérifie sa négation. Soit $A > 0$ et $\delta > 0$, considérons un réel $0 < x_0 < \min(1/A, \delta)$. On a bien $x_0 < \delta$ et $f_2(x_0) = \frac{1}{x_0} \geq A$.

   – f_3 vérifie la propriété (LM), en effet, pour tout $0 \leq x \leq 123$, $cos(x) \leq 1$.