Contrôle continu numéro 2 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'une suite convergente.
2. Démontrer que la limite d'une suite convergente est unique.
3. Donner la définition d'une suite de Cauchy. Démontrer qu'une suite de réels convergente est de Cauchy. Que dire de la réciproque (sans démonstration) ?

Exercice 2. Théorème de Césaro.
Pour tout suite $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on définit la suite $(\widetilde{u}_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante : pour tout $n \geq 1$, $\widetilde{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $(\widetilde{u}_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.
2. Donner un exemple de suite telle que $(\widetilde{u}_n)_{n\geq 1}$ converge mais pas $(u_n)_{n\geq 1}$. Justifier.

Exercice 3. Suites récurrentes.
On définit les fonctions suivantes

$$f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+2x),\ \ g :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - x.$$

1. (a) Montrer que f est croissante sur son intervalle de définition.
   (b) Etudier la fonction g (faire un tableau de variation) et montrer que l'équation $f(x) = x$ admet pour solutions 0 et un réel $c > \frac{1}{2}$. *On rappelle que* $\ln(2) \approx 0,69$.
   (c) Etudier le signe de $g(x)$ pour $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
   (d) Montrer que $[0, c]$ est stable par f (*i.e.* $f([0, c]) \subset [0, c]$).
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 \in [0, c]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Sur un dessin (très propre !) tracer la courbe représentative de la fonction f. On tracera également la droite d'équation $y = x$ ainsi que quelques itérations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Montrer que cette suite est bien définie (*on montrera au passage que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \ldots$).
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (d) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.