LM-115, Suites et intégrales, MIME 24.1, second semestre 2010-2011 Université Pierre et Marie Curie

Corrigé contrôle continu numéro 1

Exercice 1 Question de cours.

Tout est dans le cours.

Exercice 2 Théorème de Césaro

1. Soit $\varepsilon > 0$.

On sait que $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} \ell$ donc il existe $N_{0,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que,
$\forall n \geq N_{0,\varepsilon}$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*le choix de $\varepsilon/2$ plutôt que ε ne peut se faire qu'à posteriori*).
Fixons donc un tel entier $N_{0,\varepsilon} \geq 1$. Intéressons nous maintenant à la quantité que nous souhaitons majorer par ε (à partir d'un certain rang) à savoir $|\widetilde{u}_n - \ell|$.
Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{u}_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)\right| \quad (\text{car } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \ell) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \quad (\text{par inégalité triangulaire.}).
\end{aligned}$$

Nous savons majorer les quantités $|u_k - \ell|$ pour $k \geq N_{0,\varepsilon}$. Il est donc naturel de couper la somme ci dessus en deux morceaux : l'un comprenant les indices inférieurs à $N_{0,\varepsilon}$, l'autre les indices supérieurs.
Ainsi, pour tout $n \geq N_{0,\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{u}_n - \ell| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_{0,\varepsilon}}^{n} \underbrace{|u_k - \ell|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| + \underbrace{\frac{n - N_{0,\varepsilon} + 1}{n}}_{\leq 1} \times \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$, car la somme ne dépend plus de n (*cette suite est finalement du type "$\frac{K}{n}$"*).

Par conséquent, il existe un entier $N_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall n \geq N_{1,\varepsilon}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| - 0 \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_{0,\varepsilon}-1} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Afin de contrôler les deux membres "en même temps", on pose $N_\varepsilon = \max(N_{0,\varepsilon}, N_{1,\varepsilon})$. Et donc pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}_n - \ell| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons démontré que $\widetilde{u_n} \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} \ell$.

Exercice 3 Suites récurrentes.

Soit les fonctions $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $g :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définies, pour tout* $x > -\frac{1}{2}$, *par*

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

et

$$g(x) = f(x) - x$$

1. a) *Montrer que f est croissante sur son intervalle de définition.*

   La fonction $x \mapsto 1 + 2x$ est croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et a pour image $]0, +\infty[$. La fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$. La fonction f est donc la composée de deux fonctions croissantes, elle est donc croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

   b) *Etudier la fonction g et montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, en plus de la solution 0, une autre solution $c > \frac{1}{2}$. On rappelle que* $\ln(2) \approx 0,69$.

   La fonction g est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ comme composée et somme de fonction dérivables. On a pour tout x dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}.$$

   Cette quantité a donc le même signe que $1-2x$ pour $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Pour ce qui est des limites, on a

$$g(x) \xrightarrow[x \mapsto \frac{1}{2}^+]{} -\infty$$

   par les techniques habituelles et

$$g(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} -\infty$$

   par théorème de comparaison entre le logarithme et les polynômes.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

De plus, g est continue, $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$ et $g(\frac{1}{2}) > 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ a une solution dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et cette solution est unique par injectivité (car g est continue et strictement monotone sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$). En fait c'est la solution évidente $x = 0$.

Maintenant, sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, le même raisonnement montre qu'il existe un unique réel $c > \frac{1}{2}$ vérifiant $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

c) *Etudier le signe de $g(x)$ pour $x \in]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$.*

On le déduit aisément du tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$		0		c		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. *Montrer que $[0, c]$ est stable.*
La fonction f est croissante et continue sur $[0, c]$, donc $f([0, c]) = [f(0), f(c)] = [0, c]$.
Voir Figure 1.

3. *On définit la suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in [0, c]$ et la relation*

$$u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$$

pour tout n entier.

a) *Faire un dessin très propre.*

b) *Expliquer pourquoi cette suite est bien définie.*
La suite est bien définie car l'intervalle $[0, c]$ est stable par f. On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, c]$.

c) *Montrer que (u_n) est croissante.*
Soit n entier naturel, alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.
Or d'après la question précédente $u_n \in [0, c]$ donc $g(u_n) \geq 0$ d'après le tableau de signes de g. Donc (u_n) est croissante.

d) *Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite en fonction de la valeur de u_0.*
La suite (u_n) est croissante et majorée par c, elle converge donc vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme f est continue, la limite de (u_n) est un point fixe de f donc $\ell = 0$ ou $\ell = c$.
Si $u_0 = 0$ alors la suite est stationnaire et converge donc vers 0. Sinon on a $u_0 > 0$ et par croissance ℓ est supérieure à u_0 donc strictement positive, donc (u_n) converge vers c.

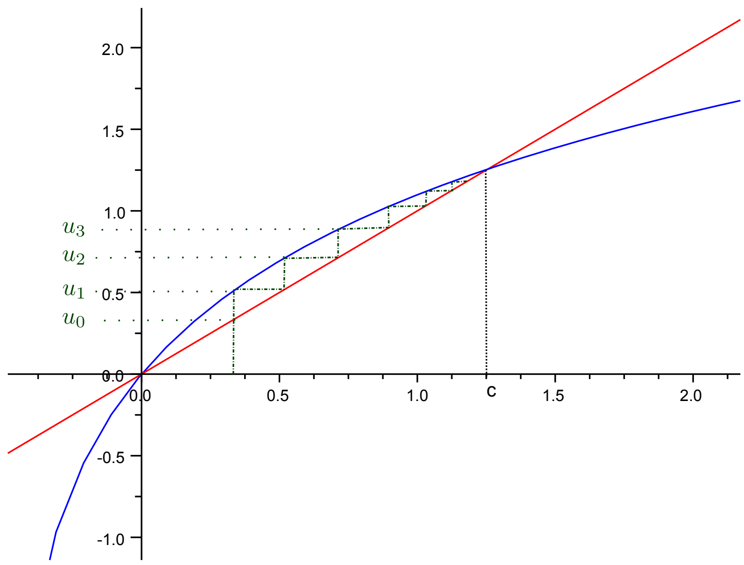

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f(en bleu) et de la première bissectrice (en rouge) ainsi que quelques itérations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.