Contrôle continu numéro 3 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Démontrer qu' une application continue en un point est bornée au voisinage de ce point.
2. Enoncer (sans démonstration) le théorème de Taylor-Lagrange.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x \mapsto 4 - \ln(x)$.

1. Montrer que l'intervalle $[2, e^2]$ est stable par f (rappel: $e \approx 2,71$).
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution que l'on notera l et montrer que $2 < l < e^2$.
3. Montrer qu'il existe une constante $c \in]0, 1[$ (que l'on déterminera) telle que
$$\forall (x, y) \in [2, e^2]^2, \;\; |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$
4. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 \in [2, e^2]$ et la relation $u_{n+1} = 4 - \ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \in [2, e^2]$ pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer par récurrence (très proprement) que
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,, \; |u_n - l| \leq 7c^n.$$
   (c) Etudier le comportement asymtotique de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3. Calculs d'intégrales.
Montrer que les intégrales suivantes existent puis les calculer.

1. $$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt.$$
2. $$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$