LM-115, Suites et intégrales, MIME 24.1, second semestre 2010-2011 Université Pierre et Marie Curie

Corrigé contrôle continu numéro 3

Exercice 1 Question de cours.
Tout est dans le cours.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 4 - \ln(x)$.
1) Montrer que $[2, e^2]$ *est stable par* f *(rappel :* $e \approx 2,71$*).*
f est clairement décroissante car le logarithme est croissant. Par conséquent, pour tout $2 \leq x \leq e^2$ on a $f(e^2) \leq f(x) \leq f(2)$ et donc $f([2, e^2]) \subset [f(e^2), f(2)]$. D'autre part, $[f(e^2), f(2)] \subset f([2, e^2])$ d'après le théorème de valeurs intermédiaires (f est continue). Finalement $f([2, e^2]) = [f(e^2), f(2)]$. On a $f(e^2) = 2$ et $f(2) = 4 - \ln(2) \leq 4 \leq e^2$. Ces deux inclusions montrent que $[f([2, e^2]) = [f(e^2), f(2)] \subset [2, e^2]$, en d'autres termes l'intervalle $[2, e^2]$ est stable par f.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ *admet une unique solution que l'on notera* l *et montrer que* $2 < l < e^2$*.*
Posons $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 4 - \ln(x) - x$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = -1/x - x < 0$. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En outre g est continue donc, d'après le théorème de la bijection, g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $g(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x\mapsto 0} g(x), \lim_{x\mapsto +\infty} g(x)[=] - \infty, +\infty[$.
Or $0 \in] - \infty, +\infty[$ donc il existe un unique $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(l) = 0$ c'est-à-dire $f(l) = l$. Par ailleurs on a $g(2) = 2 - \ln(2) > 0$ donc par décroissance de g on a nécessairement $l > 2$ et de même $l < e^2$ car $g(e^2) = 2 - e^2 < 0$.

3)Montrer qu'il existe une constante $c \in]0, 1[$ *(que l'on déterminera) telle que* $\forall (x, y) \in [2, e^2]^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$*.*
On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[2, e^2]$. Le théorème s'applique car, sur cet intervalle, f est dérivable et sa dérivée est bornée. En effet, pour tout $x \in [2, e^2]$, on a $f'(x) = -1/x$. Donc pour tout $x \in [2, e^2]$, $|f'(x)| = 1/x \leq 1/2$. Finalement on obtient le résultat cherché avec $c = 1/2$.

4) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *par la donnée de* $u_0 \in [2, e^2]$ *et la relation* $u_{n+1} = 4 - \ln(u_n)$ *pour tout entier naturel* n*.*
a) Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \in [2, e^2]$ *pour tout entier naturel* n*.*
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie car l'intervalle $[2, e^2]$ est stable et donc en particulier, aucun terme de la suite ne peut "sortir" de l'ensemble de définition de f, $\mathbb{R}_+^*$. Une rapide récurrence récurrence montre que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [2, e^2]$.
b)Montrer par récurrence (très proprement) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq 7c^n$*.*
Pour tout entier naturel n on définit $\mathcal{P}(n)$: " $|u_n - l| \leq 7c^n$ ".
Initialisation : (au rang n=0)
On sait que $u_0 \in [2, e^2]$ et $l \in [2, e^2]$ donc $|u_0 - l| \leq e^2 - 2 \leq 3^2 - 2 = 7$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-l| &= |f(u_n)-f(l)| \\ &\leq c|u_n-l| \quad \text{(d'après la question 3 et } (u_n,l)\in[2,e^2]^2) \\ &\leq c7c^n \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 7c^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : d'après le théorème de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
c)Etudier le comportement asymtotique de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
On a $|c|<1$ donc $7c^n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} l$.

Exercice 3 Calculs d'intégrales.

1. $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}dt$. I existe car pour tout $t\in[0,1]$ l'expression $\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ définit une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable au sens de Riemann.

$$\begin{aligned}I &= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(1+t)\right)^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2)^2.\end{aligned}$$

2. On pose $J=\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx$. J existe car la fonction intégrée $f:[0,1]\to$, $x\mapsto x^2e^{-x}$ est continue.

   L'idée est de faire disparaître le terme x^2 par dérivation, l'exponentielle ne bougera pas... On effectue une première intégration par parties avec les expressions suivantes (qui définissent bien des applications C^1).

$$u'=e^{-x},\ v=x^2 \Rightarrow u=-e^{-x},\ v'=2x.$$

$$\begin{aligned}J &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1(-2xe^{-x}dx) \\ &= -e^{-1}+\int_0^1(2xe^{-x}dx)\end{aligned}$$

   De la même manière on calcule cette nouvelle intégrale par intégration par parties.

$$u'=e^{-x},\ v=2x \Rightarrow u=-e^{-x},\ v'=2.$$

$$\begin{aligned}J &= -e^{-1}+\left[-2x^2e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1(-2e^{-x}dx) \\ &= -3e^{-1}+\left[-2e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -5e^{-1}+2.\end{aligned}$$