

Feuille de TD 9 : Réduction**Exercice 1. Diagonalisation**

On considère les matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de chacune de ses matrices.
2. En déduire les valeurs propres de chacune de ces matrices dans \mathbb{R} , puis si nécessaire dans \mathbb{C} .
3. Calculer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre. Quels sont les matrices diagonalisables dans \mathbb{R} ? dans \mathbb{C} ?
4. Diagonaliser les matrices diagonalisables.

Exercice 2. Exposant de matrices

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Calculer de façon générale A^n , B^n et C^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Quelles matrices sont inversibles? Quelles sont les valeurs propres de leurs inverses? Comment se diagonalisent leurs inverses?
3. En déduire une formule pour A^k , B^k et C^k pour $k \in \mathbb{Z}$. (Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A^{-n} = (A^{-1})^n$).