Université Pierre et Marie Curie
License LM125 Année 2009-2010
3S-1

Contrôle continu 1

Question de cours

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, de coefficients a_{ij} et b_{ij}. On pose $S = A+B$ et $P = AB$. Expliciter les coefficients s_{ij} et p_{ij} de S et de P.

Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer, si elle existe, l'inverse de P, P^{-1}.
- Calculer $D = P^{-1}MP$. Que peut-on dire sur D et M ?
- Calculer D^n.
- Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$.
- Calculer M^n.

Exercice 2

Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}$

Résoudre, en fonction du paramètre α, le système $\begin{cases} \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y = 0 \\ \sin\alpha\ x - \cos\alpha\ y = 0 \end{cases}$

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_n$.

- Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe α_n et β_n tels que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_n$. (On ne demande pas les expressions de α_n et β_n).
- On suppose que β est non nul. Calculer M^{-1}.
- Montrer que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, il existe α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_n$. Les expliciter, et calculer M^{-1} quand cela est possible.

Exercice 4

Inverser, quand c'est possible, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$