Correction Contrôle continu numéro 1 (1h)

Exercice 1. Questions de cours. (4 points)
Cours polycopié.

Exercice 2. Carré de matrices. (5 points)
`Erratum :` Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe deux complexes α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_n$.
1)`Erratum :` Montrer que pour tout $m \geq 0$, il existe deux complexes α_m et β_m tels que $M^m = \alpha_m M + \beta_m I_n$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit la proposition,

$$\mathcal{P}_m : \text{“il existe deux complexes } \alpha_m \text{ et } \beta_m \text{ tels que } M^m = \alpha_m M + \beta_m I_n\text{”.}$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout $m \geq 0$.
Initialisation : cette étape consiste à démontrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
(*Note: puisque nous désirons montrer la proposition pour tout* $m \geq 0$ *nous initialisons pour* $m = 0$).
$M^0 = I_n$ par définition donc $M^0 = 0.M + 1.I_n$.
On pose $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$, la proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
Hérédité (ou récurrence) : Soit $m \geq 0$ fixé, supposons $\mathcal{P}_m$ vraie. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
M^{m+1} &= M.M^m \quad \text{(par définition des puissances d'une matrice,)}\\
&= M(\alpha_m M + \beta_m I_n) \quad \text{(car } \mathcal{P}_m \text{ est vraie et donc de tels scalaires } \alpha_m \text{ et } \beta_m \text{ existent,)}\\
&= \alpha_m M^2 + \beta_m M.I_n \quad \text{(par distributivité du produit matriciel à gauche,)}\\
&= \alpha_m(\alpha M + \beta I_n) + \beta_m M \quad \text{(car } M^2 = \alpha M + \beta I_n,\text{)}\\
&= (\alpha_m \alpha + \beta_m)M + (\alpha_m \beta)I_n.
\end{aligned}$$

On pose alors $\alpha_{m+1} = \alpha_m \alpha + \beta_m$ et $\beta_{m+1} = \alpha_m \beta$, la proposition $\mathcal{P}_{m+1}$ est donc vraie.
Conclusion : Nous savons d'une part que $\mathcal{P}_0$ est vraie et d'autre part que pour tout $m \geq 0$, ($\mathcal{P}_m \Rightarrow \mathcal{P}_{m+1}$) (*i.e* ***si*** $\mathcal{P}_m$ *est vraie* ***alors*** $\mathcal{P}_{m+1}$ *est vraie*).
Donc d'après le théroème de récurrence la proposition $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout $m \geq 0$.

Note: $\mathcal{P}_m$*:“* $\forall m \geq 0$*, il existe deux complexes* α_m *et* β_m *tels que* $M^m = \alpha_m M + \beta_m I_n$*” n'a pas de sens. C'est très logique : si vous définissez la proposition pour un certain* $m \geq 0$ *vous ne pouvez la définir en même temps pour tout* m*.*

2)*Note: L'hypothèse porte sur* β*, c'est donc sur la formule qui fait intervenir celui-ci que notre regard doit se porter en premier*.
Nous avons $M^2 = \alpha M + \beta I_n$ donc par distributivité à gauche $M(M - \alpha I_n) = \beta I_n$ et donc comme $\beta \neq 0$, $M\left(\frac{1}{\beta}(M - \alpha I_n)\right) = I_n$ (les scalaires commutent dans le produit matriciel). De manière similaire, en utilisant la distributivité à gauche on obtient $\frac{1}{\beta}(M - \alpha I_n)M = I_n$. Par conséquent, lorsque β est non nul M est une matrice inversible et son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{\beta}(M - \alpha I_n)$.
Notes: i) Les formules du type $(M - \alpha)$ *n'ont pas de sens. On ne peut pas parler de la différence d' un élément de* $M_n(\mathbb{C})$ *et d'un complex.*
ii)En réalité on a besoin de montrer l'inversibilité que d'un seul côté mais encore faut il le justifier.

3)`Erratum :` Montrer que pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$, il existe deux complexes α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ puis calculer A^{-1} lorsque cela est possible.
Note: l'étude se restreint maintenant aux matrices 2x2. On ne connait pas à priori la forme des complexes α *et* β *dont on doit prouver l'existence. Pour cela nous allons mener un raisonnement par Analyse-Synthèse. Dans une première étape (Analyse) on supposera que de tels complexes existent nous verrons quelles formes doivent avoir nécessairement de tels*

complexes. L'Analyse nous sert ici pour nous instruire, nous répondons à la question (i.e nous démontrons l'existence) dans la Synthèse.
Analyse: Supposons qu'il existe α et β deux complexes vérifiant $A^2 = \alpha A + \beta I_2$. Or,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système linéaires d'inconnus α et β suivant,

$$\begin{cases} a^2 + bc &= \alpha a + \beta \\ c(a+d) &= \alpha c \\ b(a+d) &= \alpha b \\ d^2 + bc &= \alpha d + \beta \end{cases}$$

Nous ne cherchons pas à trouver toutes les solutions donc une résolution par le pivot de Gauss ne s'impose pas.
On remarque simplement que si $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ alors $\alpha = a + d$ et donc $\beta = bc - ad$.
Synthèse: Montrons que les valeurs trouvées dans la synthèse $\alpha = a + d$ et $\beta = bc - ad$ verifient $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
La matrice A de l'énoncé est générale, il faut démontrer le résultat également pour $b = 0$ et $c = 0$. En réalité, ceci ne posera pas de difficultés. On reprend donc le calcul,

$$(a + d)A + (bc - ad)I_2 = \ldots = A^2.$$

Et cela fonctionne.
Note : Normal on a tout fait pour ! Cette étape est néamoins en termes de logique bien différente de l'analyse.
Lorsque $\beta \neq 0$, M est inversible et son inverse s'écrit $A^{-1} = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n)$. Donc dans notre cas particulier des matrices 2x2, lorsque $bc - ad \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
$bc - ad$ est l'opposé du déterminant de la matrice A. Dans tout l'énoncé le fait que les matrices soient à coefficients complexes n'a aucune influence on aurait pu remplacer $\mathbb{C}$ par K.

Exercice 3. Pivot de Gauss. (7 points)

- A est inversible d'inverse: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Après calcul on s'aperçoit que la matrice B est de rang 2, elle n'est donc pas inversible car la matrice est carrée d'ordre 3.

- Après calcul on s'aperçoit que C est de rang 3 (rang maximal pour une matrice 3x4). L'inversibilité n'est pas définie pour les matrices non carrées.

Exercice 4. (4 points)
L'énoncé donne la matrice qui sera l'inverse de $I - B$ donc il suffit de vérifier les égalités,

$$(I - B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k = \left(\sum_{k=0}^{p-1} B^k\right)(I - B) = I_n.$$

$$\begin{aligned}
(I-B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k &= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - B\sum_{k=0}^{p-1} B^k \quad \text{(par distributivité,)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - \sum_{k=0}^{p-1} B^{k+1} \quad \text{(encore un fois par distributivité,)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - \sum_{k=1}^{p} B^k \quad \text{(en réindexant la somme,)}\\
&= B^0 + \sum_{k=1}^{p-1} B^k - \sum_{k=1}^{p-1} B^k - B^p \quad \text{(en mettant des termes de cotés dans chaque somme,)}\\
&= B^0 - B^p\\
&= I_n \quad \text{(car } B^p = 0 \text{ et } B^0 = I_n \text{ par définition.)}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{p-1} B^k\right)(I-B) &= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - \left(\sum_{k=0}^{p-1} B^k\right) B \quad \text{(par distributivité,)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - \sum_{k=0}^{p-1} B^{k+1} \quad \text{(par distributivité,)}\\
&= I_n \quad \text{(il s'agit de la même expression que précédemment.)}
\end{aligned}$$

Note : Le binôme de Newton n'a rien à voir ici. La somme ne fait même pas intervenir de coefficients binomiaux.