Contrôle continu numéro 1 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barème donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.

Exercice 1. Questions de cours. (4 points)
Ces questions portent sur des définitions, le correcteur attend de l'étudiant une rigueur irréprochable. Par exemple, toutes les notations doivent être introduites.

- Donner la définition du produit matriciel (pour des matrices non nécessairement carrées).
- Donner la définition de l'inversibilité d'une matrice carrée.

Exercice 2. Carré de matrices. (5 points)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_n$.

1. Montrer que pour tout $m \geq 0$, il existe α_m et β_m tels que $M^m = \alpha_m M + \beta_m I_n$. (*On démontrera ceci à l'aide d'une récurrence que l'on rédigera proprement. Attention, on ne demande pas les expressions de α_m et β_m en fonction de m*).
2. On suppose que β est non nul. Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1}.
3. Montrer que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$, il existe α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$ puis calculer M^{-1} lorsque cela est possible.

Exercice 3. Pivot de Gauss. (7 points)
Mettre les matrices suivantes sous forme échelonée, discuter de l'inversibilité, lorsque la matrice est inversible poursuivre le calcul et donner l'inverse. *Les opérations de pivots doivent impérativement figurer sur la copie.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (4 points)
Soit $B \in M_n(K)$, on suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $B^p = 0$. Dans ce qui précède, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et 0 la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Montrer que $I - B$ est inversible et d'inverse $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} B^k$