Correction Contrôle continu numéro 1 (1h)

Exercice 1. Questions de cours. (4 points)
Cours polycopié Théorème 30.

Exercice 2. To be or not to be. (6 points)
Applications linéaires.
1) Il n'existe pas d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons qu'il en existe une que l'on note f. L'espace de départ $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie on peut donc appliquer le théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ car f est injective. Donc $\operatorname{rg} f = 4$ ce qui est impossible car $\operatorname{Im} f$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ et donc $\operatorname{rg} f \leq 3$.
2) il existe de telles application par exemple. φ est évidement linéaire et surjective

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x,y,z) \end{array}$$

3)Il existe de telles applications. Par exemple l'application nulle.

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

4)Ceci est impossible d'après le théorème 31 du cours. Une application linéaire entre deux sous espaces de même dimension (finie) est injective si et seulement si elle est surjective.

Vecteurs.
1) Pas la peine d'aller chercher très loin on se rappelle qu'une famille formée d'un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul. (Proposition 38) la famille $\{(1,1,1,1)\}$ convient donc.
2) On se souvient qu'une sous famille d'une famille libre est libre (Proposition 39 b). La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est une famille libre à quatre éléments puisque c'est une base. Il suffit d'enlever un vecteur, le dernier par exemple, la famille suivante convient donc $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$.
3) une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ a au moins quatre vecteurs (Proposition 45). Donc une famille libre à 1 élément convient prendre la solution du 1).
4) On sait qu'une famille libre de $\mathbb{R}^4$ a au plus 4 éléments (Proposition 45) et que tout famille contenant une famille génératrice est elle même génératrice (Proposition 36). On peut donc prendre la base canonique de $\mathbb{R}^4$ qui est donc génératrice et lui ajouter n'importe quel vecteur :

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}$$

Exercice 3. L'hyperplan des matrices de trace nulle (4 points).
1) On définit l'application

$$tr : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} \end{array}$$

tr est bien une application linéaire sur $\mathbb{C}$ (rappelons que $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel cf Exemple 29). En effet, soient $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$ et λ, μ deux complexes.

$$\begin{aligned} tr(\lambda M + \mu N) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda M + \mu N)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda m_{k,k} + \mu n_{k,k} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} n_{k,k} \\ &= \lambda tr(M) + \mu tr(N). \end{aligned}$$

Il est clair que $H = \operatorname{Ker} tr$.
2) $\operatorname{Im} tr \subset \mathbb{C}$ donc $\operatorname{rg} tr = 0$ ou $\operatorname{rg} tr = 1$. Montrons que $\operatorname{rg} tr \neq 0$ donc $\operatorname{rg} tr = 1$ et donc on obtiendra que $\operatorname{Im} tr = \mathbb{C}$ c'est à dire que tr est surjective.
Si $\operatorname{rg} tr = 0$ cela voudrait dire que $\operatorname{Im} tr = \{0\}$ et donc que $\forall M$, $tr(M) = 0$. Or ceci n'est pas le cas puisque par exemple, $tr(I_n) = n \neq 0$.
3)H est un espace vectoriel comme noyau d'une application linéaire. H est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ (qui est de dimension finie égale à n^2 cf Exemple 72) donc H est également de dimension finie. L'espace de départ de l'application tr est un espace de dimension finie on peut donc appliquer le théorème du rang. $\dim M_n(\mathbb{C}) = \dim H + \operatorname{rg} tr$. Par conséquent $\dim H = n^2 - 1$.

Exercice 4. Somme directe dans $\mathbb{R}^3$ (3 points).
1)$F_2 = Vect\{(1, 1, 1)\}$ donc F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (cf Exemple 32).
F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $F_1 \subset \mathbb{R}^3$.
- $(0, 0, 0) \in F_1$.
- soient $u = (u_1, u_2, u_3) \in F_1$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in F_1$ ainsi que λ et μ deux réels, On a $\lambda u + \mu v \in F_1$. En effet, $\lambda u + \mu v = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3)$. Et,
$(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) + (\lambda u_3 + \mu v_3) = \lambda(u_1 + u_2 + u_3) + \mu(u_1 + u_2 + u_3) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$.

2) Démontrons d'abord que la somme $F_1 + F_2$ est directe, c'est à dire montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. On a évidement $\{0\} \subset F_1 \cap F_2$. Montrons donc l'autre inclusion soit $u \in F_1 \cap F_2$, $u \in F_2$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$ mais comme $u \in F_1$ on a $\lambda + \lambda + \lambda = 0$ par conséquent $u = 0$. Finalement, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ la somme $F_1 + F_2$ est directe on peut écrire $F_1 \oplus F_2$.
On a donc $F_1 \oplus F_2 \subset \mathbb{R}^3$, il suffit de démontrer que $\dim(F_1 \oplus F_2) = 3$ pour obtenir l'égalité des deux ensembles. D'après la formule sur la dimension d'une somme directe (cf Théorème 26) on a que $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.
On a $\dim F_1 = 2$ car $F_1 = Vect\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ donc la famille $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ est génératrice, on vérifie très rapidement que cette famille est libre. Cette famille est donc une base, elle a deux éléments donc $\dim F_1 = 2$.
Il est évident que $\{(1, 1, 1)\}$ est une base de F_2 donc F_2 est de dimension 1.
Ceci prouve bien que $\dim(F_1 \oplus F_2) = 3$.