Contrôle continu numéro 2 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barême donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.

Exercice 1. Question de cours (4 points).
Le correcteur attend de l'étudiant une rigueur irréprochable. Par exemple, toutes les notations doivent être introduites.
Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2. To be or not to be (8 points).
Existe t' il des applications linéaires vérifiants les points suivants ?
Pour répondre à cette question, dans chaque cas, donner un exemple ou bien démontrer que de telles applications n'existent pas.

1. Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
3. Une application linéaire non surjective $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
4. Une application linéaire injective mais non surjective $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

Existe t'il des familles de vecteurs vérifiant les points suivants ?
Pour répondre à cette question, dans chaque cas, donner un exemple ou bien argumenter que de telles familles n'existent pas.

1. une famille libre de $\mathbb{R}^4$ composée de 1 vecteur.
2. une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
3. une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui soit libre mais non génératrice de $\mathbb{R}^4$.
4. une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui soit génératrice de $\mathbb{R}^4$ mais qui ne soit pas libre.

Exercice 3. Somme directe dans $\mathbb{R}^3$ (4 points).
Soient $F_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\big\}$ et $F_2 = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Monter que F_1 et F_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.
   On acceptera aussi bien les raisonnements utilisant la dimension que ceux "à la main". Prenez garde à bien vous justifier si vous utilisez des arguments utilisant la dimension.

Exercice 4. L'hyperplan des matrices de trace nulle (4 points).
Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ (n entier ≥ 1), on définit le nombre complex $tr(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.
On considère $H = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ , \ tr(M) = 0\}$.

1. Ecrire H comme le noyau d'une application de $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dont on vérifiera qu'elle est linéaire.
2. Montrer que cette application est surjective.
3. Démontrer que H est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Calculer sa dimension.
   (*Attention à la dimension de $M_n(\mathbb{C})$!*).