

Contrôle continu numéro 3 (45 min)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barème donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.

Exercice

Soit f l'application :

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (3x - y + z - t, -4x + y - 2z, -6x + 2y - 2z + 2t, 4x - y + 2z)$$

On supposera acquis la linéarité de f .

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer le rang de f et une base de $\text{Im}f$.
On rappelle que les rangs des matrices représentatives d'une application linéaire (pour n'importe quelle base) sont tous égaux au rang de l'application linéaire.
3. Déterminer la dimension de $\text{Ker}f$ ainsi qu'une base $\text{Ker}f$.
4. En déduire le déterminant de f .
5. Montrer que $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
6. Soit,

$$F = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u) = u\}.$$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et déterminer la dimension de F .

Afin de gagner du temps, il peut être judicieux d'écrire F comme le noyau d'une application linéaire.

La correction est accessible à l'url : http://www.edu.upmc.fr/maths/math1/lm125/annales_125/LM125-mai2009-corrige.pdf. Les annales de LM125 sont facilement retrouvables à partir de Sakai (par exemple annonce: Révision fin Avril).