Un exercice sur les matrices d'applications linéaires.

Exercice.
Soit f la fonction définie par:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+3y+2z, x+y+z+t, x-t) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. La fonction f est-elle injective? surjective?
3. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$. En déduire la dimension de chacun d'eux.
4. Compléter la base de $Ker(f)$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et celle de $Im(f)$ en une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Ecrire la matrice de f dans les bases trouvées dans la question précédente.

Correction.
1. Tout d'abord démontrons que f est bien une application linéaire. Notons qu'elle est bien définie sur deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^3$ l'espace de départ et $\mathbb{R}^4$ l'espace d'arrivée.
Soit λ, μ deux réels et $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 + 3(\lambda x_2 + \mu y_2) + 2(\lambda x_3 + \mu y_3), \\ &\quad \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 + \lambda x_4 + \mu y_4, \lambda x_1 + \mu y_1 - (\lambda x_4 + \mu y_4)) \\ &= \lambda(x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_4) + \mu(y_1 + 3y_2 + 2y_3, y_1 + y_2 + y_3 + y_4, y_1 - y_4) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

f vérifie la condition de linéarité donc f est bien une application linéaire.
Soit $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$, et posons $\mathcal{B}^1_{can} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ qui forme la base canonique de $\mathbb{R}^4$. De même dans $\mathbb{R}^3$, soit $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$, posons $\mathcal{B}^2_{can} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ qui forme la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Nous avons les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,1,1) = 1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3 \\ f(e_2) &= (3,1,0) = 3\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(e_3) &= (2,1,0) = 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(e_4) &= (0,1,-1) = 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + (-1)\varepsilon_3. \end{aligned}$$

La matrice d'une application linéaire se rempli par colonne. Chaque colonne correspond à la décomposition de l'image par f d'un élément de la base de l'espace de départ (ici $\mathcal{B}^1_{can}$) dans la base d'arrivée (ici $\mathcal{B}^2_{can}$). Dans notre cas, la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}^1_{can}$ et $\mathcal{B}^2_{can}$ est une matrice à quatre colonnes et trois lignes, compte tenu des égalités précédentes, elle s'écrit,

$$[f]^{\mathcal{B}^2_{can}}_{\mathcal{B}^1_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le noyau de f noté $\mathrm{Ker}(f)$, s'écrit,

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_4 = 0\right\}.$$

Ce sont les solutions du système linéaire d'inconnues (x_1, x_2, x_3, x_4) suivant,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x_4, 3x_4, -5x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\} = Vect\,\{u\}$.
Où $u = (1, 3, -5, 1)$.
Le noyau n'est pas réduit à l'espace nul donc l'application n'est pas injective.
En fait on pouvait répondre à la question de l'injectivité sans calcul. L'espace de départ est de dimension 4 donc plus "gros" que celui d'arrivée qui est de dimension 3 l'application ne peut pas être injective. Ceci peut être démontré par le théorème du rang : $dim(\mathbb{R}^4) = dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f)$*. Or on sait que* $rg(f) \leq 3$ *donc nécessairement* $dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$*, par conséquent le noyau ne peut être réduit à l'espace nul qui est de dimension 0.*
En ce qui concerne l'image de f, il est aisé de voir ce sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ comme un $Vect$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \left\{x(1,1,1) + y(3,1,0) + z(2,1,0) + t(0,1,-1), (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\right\} \\ &= Vect\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\end{aligned}$$

Où $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ et $v_4 = (1, 1, 1)$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc f est surjective si et seulement si $dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. La dimension de l'image est facilement calculable par le théorème du rang. En effet, $dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ car la famille composée du seul vecteur u est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$; cette famille est évidement libre puisque que cet unique vecteur est non nul. D'après le théorème du rang $rg(f) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$. Par conséquent, l'application f est surjective.

3.Une bonne partie de cette question a été traitée dans la question précédente. En particulier, nous avons montré que le noyau de f est de dimension 1 et que la famille $\{u\}$ forme une base de celui ci. [***Attention*** *cependant, pour l'image* f *la famille* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*, et génératrice mais elle ne peut être une base ! En effet, elle contient quatre vecteurs et l'on sait que* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension 3.*]
D'après le théorème de la base extraite, on sait qu'il est possible d'extraire 3 vecteurs de
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ qui formeront alors une base de $Vect\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ c'est-à-dire de $\mathrm{Im}(f)$.
On vérifie que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre (par exemple, en formant un système à l'aide d'une combinaison linéaire nulle ou bien en montrant l'inversibilité de la matrice $P_{\mathcal{B}^2_{can} \to \mathcal{B}^2}$ (voir question 4.)). Il s'agit donc d'une base de $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

4. Nous avons vu que la famille $\mathcal{B}^2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $Im(f) = \mathbb{R}^3$, il n'y a donc pas besoin de la completer. Completons la base $\{u\}$ de $\mathrm{Ker}(f)$ en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide d'éléments de la base canonique $\mathcal{B}^1_{can}$. Posons $\mathcal{B}^1 = \{u, e_2, e_3, e_4\}$, on peut vérifier que cette famille est libre à l'aide d'un système linéaire. On peut également considérer la matrice de cette famille de vecteur dans la base $\mathcal{B}^1_{can}$ que l'on notera $P_{\mathcal{B}^1_{can} \to \mathcal{B}^1}$, elle s'écrit,

$$P_{\mathcal{B}^1_{can} \to \mathcal{B}^1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La famille $\mathcal{B}^1$ est une base si et seulement si cette matrice est inversible. Or cette matrice est clairement inversible car son déterminant est égal à 1.
5. Nous connaissons la matrice de l'application linéaire f dans la base $[f]^{\mathcal{B}^2_{can}}_{\mathcal{B}^1_{can}}$. Nous pourrions déduire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}^1$ et $\mathcal{B}^2$ (notée $[f]^{\mathcal{B}^2}_{\mathcal{B}^1}$) grâce à la formule de changement de base (voir plus loin). Ces calculs peuvent être évités, en observant la décomposition dans la base $\mathcal{B}^2$ des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}^1$. nous avons les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 0 \text{ car } u \in \mathrm{Ker}(f) \\ f(e_2) &= v_1 \text{ par définition de } v_1 \\ f(e_3) &= v_2 \text{ par définition de } v_2 \\ f(e_4) &= v_3 \text{ par définition de } v_3 \end{aligned}$$

Donc,

$$[f]^{\mathcal{B}^2}_{\mathcal{B}^1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul avec la formule de changment de base :

$$[f]^{\mathcal{B}^2}_{\mathcal{B}^1} = \left(P_{\mathcal{B}^2_{can} \to \mathcal{B}^2}\right)^{-1} [f]^{\mathcal{B}^2_{can}}_{\mathcal{B}^1_{can}} P_{\mathcal{B}^1_{can} \to \mathcal{B}^1}$$

$P_{\mathcal{B}^2_{can} \to \mathcal{B}^2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Son inverse (après calcul) est, $\left(P_{\mathcal{B}^2_{can} \to \mathcal{B}^2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Finalement, en effectuant le produit matriciel ont retrouve la même matrice que précédement pour $[f]^{\mathcal{B}^2}_{\mathcal{B}^1}$.