Contrôle continu numéro 1 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barême donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.

Exercice 1. (5 points)
Résoudre le système suivant en variables réelles en discutant suivant la valeur du paramètre réel λ,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + \lambda z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. (5 points)
Calculer l'inverse de la matrice suivante,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (5 points)
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On définit la trace de A, notée $tr(A)$, par la formule $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. On définit également la matrice transposée que l'on notera $A^{\perp} \in M_n(\mathbb{R})$, par la formule $\left(A^{\perp}\right)_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Montrer que si $tr\left(AA^{\perp}\right) = 0$ alors $A = 0$.
Indication: on se souviendra qu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes qui la composent sont nuls.

Exercice 4. (5 points)
Soit $B \in M_n(K)$, on suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $B^p = 0$. K désigne un corps commutatif et 0 la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Montrer que $I - B$ est inversible et d'inverse $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} B^k$