Contrôle continu numéro 3 (1h)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. On considère les ensembles suivants,

$$\begin{array}{lll} F_1 = \{(x, y, x+y)\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} & \text{et} & G_1 = \{(x, x, 0)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}, \\ F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\} & \text{et} & G_2 = \{(x, y, x)\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{array}$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels. (*On admettra par la suite que G_1 et G_2 sont également des espaces vectoriels*).
2. Déterminer si F_1 et G_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Même question avec F_2 et G_2.

Exercice 2. Dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$ et $f_3 : x \mapsto \cos x$, forment-elles une famille libre?
Indication : on considérera une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs puis on regardera les valeurs prises par cette combinaison pour trois réels bien choisis.

Exercice 3.

1. Soient $u = (2, 1, 0)$, $v = (0, 0, 1)$ et $w = (1, -1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui soit libre mais non génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui soit génératrice $\mathbb{R}^3$ mais qui ne soit pas libre.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-y+z, -x+y+z, 2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer Ker(f) et Im(f). f est-elle injective? surjective?
3. Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f). En déduire la dimension de chacun d'eux.