Correction de l'exercice 9 de la feuille de TD4.
Soient A et B deux matrices à coefficients réels. Elles sont supposées être semblables dans $\mathbb{C}$ donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P^{-1}BP.$$

Posons alors $P = U + iV$ avec $U, V \in P \in M_n(\mathbb{R})$.
Comme A et B sont réelles on obtient immédiatement les deux égalités $UA = BU$ et $VA = BV$.
On serait tenté d'essayer de montrer que $U \in GL_n(\mathbb{R})$ ou $V \in GL_n(\mathbb{R})$. Or un examen de quelques exemples montre qu'il n'en est rien.
Cependant on sait que $U + iV$ est inversible dans $M_n(\mathbb{C})$. L'idée est de montrer qu'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + t_0V \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour cela on étudie l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & det\,(U + zV) \end{array}$$

ϕ est une application polynomiale non nulle puisque $\phi(i) \neq 0$ donc elle a un nombre fini de racines. Par ailleurs $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est infini donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t_0) \neq 0$.

On vérifie que

$$A = (U + t_0V)^{-1}B(U + t_0V).$$