Feuille de TD 2 (bis) : matrices

Exercice 1. rang d'une matrice en fonction d'un paramètre
Discuter suivant $\lambda \in \mathbb{C}$, le rang de la matrice,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Deux matrices qui commutent.
Soit $A, B \in M_n(K)$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que A est inversible puis que les matrices A et B commutent.

Exercice 3. Transposition.
Pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée notée $A^{\perp} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et définie par $\left(A^{\perp}\right)_{i,j} = A_{j,i}$.

1. Interpréter cette définition en termes de lignes et de colonnes.

2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Montrer que A est inversible d'inverse $A^{\perp}$.

Exercice 4. Trace d'une matrice : le retour...
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $tr\left(AA^{\perp}\right) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 5. Matrices nilpotentes.
Soit $A \in M_n(K)$, A est dite nilpotente si il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors $I - A$ est inversible et préciser son inverse.

2. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes est également une matrice nilpotente.