Feuille de TD 3 : Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

Espaces Vectoriels

Exercice 1. On définit sur $E = \mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ de la manière suivante :

- $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$, pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, et
- $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

L'espace $(E, \oplus, \otimes)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Donner deux lois "naturelles" (canoniques) qui font de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel et $U, V \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que l'intersection de U et V est encore un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

Exercice 3. Montrer que le K-espace vectoriel K n'admet pas d'autre sous-espace vectoriel que $\{0\}$ et K.

Exercice 4. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 5. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}, \quad A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x\}$$

Exercice 6. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}, & A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}, \\ A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1\}, & A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2\}, \\ A_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x = 2y + 5z\}, & A_6 = \mathbb{Q}^3. \end{array}$$

Exercice 7. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions paires.
3. L'ensemble des fonctions impaires.
4. L'ensemble des fonctions croissantes.
5. L'ensemble des fonctions monotones.
6. L'ensemble des fonctions positives.
7. L'ensemble des fonctions bornées.
8. L'ensemble des fonctions dérivables.
9. L'ensemble des fonctions nulles en 1.
10. L'ensemble des fonctions égales à 1 en 0.
11. L'ensemble $\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x + 1) = 2f(x)\}$.
12. L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \ : \ f" = 0\}$.
13. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.

Exercice 8. On désigne par E l'espace des applications g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on peut écrire sous la forme

$$g : x \mapsto a \cos(2x) + b \cos(x) + c,$$

avec a, b et c dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soient f et k définies par $f(x) = \sin^2 x$ et $k(x) = \cos^2 x + \sin^2(x/2)$. Les fonctions f et k appartiennent-elles à E ? Quel est le sous-espace engendré par f ?
3. Montrer que l'espace
$$\{a \cos^2 x + b \sin^2(x/2) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
est un sous-espace de E. Quel est son intersection avec $\mathrm{Vect}(f)$?

Exercice 9. Soit
$$E = \{f_{a,b}(: x \mapsto (ax+b)e^{2x}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Démontrer que l'ensemble F des fonctions $f_{a,b}$ monotones sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Le décrire.

Exercice 10. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires :

$$\begin{array}{lll}
F_1 = \{(x,x,x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} & et & G_1 = \{(0,x,y) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}, \\
F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+2y+z=0\} & et & G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x-2y+z=0\}, \\
F_3 = \{(x,y,x+y) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} & et & G_3 = \{(x,-x,0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \\
F_4 = \{(x,y,x+y) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} & et & G_4 = \{(x,x,0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \\
F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0\} & et & G_5 = \{(x,y,x) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{array}$$

Exercice 11. On considère les sous-espaces vectoriels F_1, F_2 et F_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont respectivement paires, impaires et nulles en 0.

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 + F_2$, $F_2 + F_3$ et $F_1 + F_3$.
2. Quels couples de sous-espaces vectoriels sont en somme directe ?

Applications Linéaires

Exercice 12. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement si elle est de la forme $f(x,y) = ax + by$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif K, et soit u un endomorphisme de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. Ker u = Im u
2. $u^2 = 0$ et dim Ker u = dim Im u = dim $E/2$.

Exercice 14. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : E_1 \times E_2 \mapsto E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que Ker $f = \{(x, -x) : s \in E_1 \cap E_2\}$.
3. Montrer que Ker f et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.
4. Montrer que f a pour image $E_1 + E_2$.
5. Déduire de ce qui précède la formule :
$$\text{dim } (E_1 + E_2) + \text{dim } (E_1 \cap E_2) = \text{dim } E_1 + \text{dim } E_2.$$

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$. On désigne par I_E l'application identité de E (on notera que c'est un projecteur de E).

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $I_E - p$ est un projecteur de E. Quelles relations y a-t-il entre les images et les noyaux de p et $I_E - p$?
2. Montrer que si p est un projecteur de E, alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.
3. Montrer que si p est un projecteur de E et si f est un endomorphisme de E tel que $f(\text{Im } p) = \text{Im } p$ et $f(\text{Ker } p) = \text{Ker } p$, alors $f \circ p = p \circ f$.