Feuille de TD 6 : Applications Linéaires et Matrices

Exercice 1. Ecrire les matrices associées à toutes les applications linéaires qui figurent dans l'exercice 1 du $TD5$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 5 & 2 & -10 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. Donner les bases ainsi que la dimension de ces espaces.
2. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
3. Est-ce qu'on peut représenter $\mathbb{R}^4$ comme somme directe du noyau et de l'image de f.

Exercice 4. Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies tels que dim $E = 4$ et dim $F = 3$, de bases respectives $B_E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $B_F = \{f_1, f_2, f_3\}$. Soit $u : E \mapsto F$ l'application linéaires définie par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= f_1 + f_2 + f_3 \\ u(e_2) &= -f_1 + f_2 - f_3 \\ u(e_3) &= 2f_1 + f_2 + f_3 \\ u(e_4) &= -2f_1 - f_2 \end{aligned}$$

1. Donner la matrice de u dans les bases B_E et B_F.
2. Déterminer le noyau et l'image de u. Donner les bases ainsi que les dimensions de ces espaces.
3. L'application u est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Exercice 5. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.
Trouver la matrice de f dans la base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Exercice 6. On note p (resp. s) la projection orthogonale (resp. la symétrie orthogonale) sur la droite D d'équation $x + 2y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que p et s sont des applications linéaires et déterminer leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est leur matrice dans la base $\{u, v\}$ où $u = (1, 2)$ et $v = (-2, 1)$?

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique et $u \in L(E)$ qui envoie chaque e_i sur $e_1+e_2+e_3$.

1. Donner $M_\beta(u)$.
2. (a) Donner une base (v_1, v_2) de $\operatorname{Ker}(u)$.
   (b) Donner une base (v_3) de $\operatorname{Im}(u)$.
   (c) Montrer que $\beta' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
3. Déterminer $B = M_{\beta'}(u)$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $B_n = M_{\beta'}(u^n)$.
   (b) En déduire l'expression de $A_n = M_\beta(u^n)$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $aA + bI_3$ soit inversible. Exprimer alors l'inverse de la matrice $aA + bI_3$ comme combinaison linéaire de A et I_3.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, donner P et P^{-1} où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Calculer la composante du vecteur $(1, 1, 0)$ dans cette nouvelle base.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ une base de E.

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = u_1 + u_2$ et $v_2 = -u_1$ forme une base $\mathcal{B}'$ de E.
2. Soit $f : E \mapsto E$ linéaire de matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
dans la base $\mathcal{B}$. Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $u : E \to E$ l'application linéaire définie par :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et en trouver une base B.
2. Montrer que $u \in L(E)$ et déterminer la matrice M de u par rapport à la base B. Calculer celle de u^2.
3. Déterminer le rang de M, une base B_1 de $\operatorname{Im}(u)$ et une base B_2 de $\operatorname{Ker}(u)$.
4. Montrer que $B' = B_1 \cup B_2$ est une base de E. Que peut-on en déduire ?
5. Déterminer les matrices de passages P de B à B' et Q de B' à B. Calculer sans utiliser P et Q la matrice M' de u par rapport à B'.