

**Feuille de TD 1 : Systèmes Linéaires****Exercice 1. Opérations élémentaires sur les lignes.**

Démontrer que les systèmes a), b) et c) sont équivalents au système  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{S}) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ 9x + 3y + 7z = 14 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 9x + 3y + 7z = 14 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x - y - z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = -2 \\ 9x + 3y + 7z = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + y + 8z = 15 \\ -133x - 133y - 133z = -133 \end{cases}$$

**Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires pas à pas.**

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x = -y \\ 6x + z = 2 - 2y \\ 3y + 7z = 14 - 9x \end{cases}$$

1. Donner la matrice augmentée  $A$  associée à ce système. Mettre  $A$  sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
2. Donner le nombre de pivots. Le système est-il compatible? Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire.
3. Mêmes questions pour le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 3. Résolution de systèmes linéaires dans  $\mathbb{R}$ .**

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2t = 1 \\ 5x + 4y + z + 3t = 14 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 4 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4t = 43 \\ -3x + 2y + z - 2t = 5 \\ 4x - y + 2z + 3t = -13 \\ 5x + y + 3z + t = -28 \end{cases}$$

**Exercice 4. Résolution de système linéaires dans  $\mathbb{C}$ .**

Résoudre les systèmes suivants avec  $x, y, z$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + iy + 2z = 0 \\ ix + 3z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y = -4 + i \\ x + iz = 2 - i \\ x - y - iz = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y - z = 1 + 2i \\ ix - 3z = 3 - i \\ x + iy + z = 2 - i \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + iy - z = i \\ -ix + (1 + i)y + 2iz = 1 \end{cases}$$

**Exercice 5. Systèmes linéaires à paramètres.**

Résoudre (en variables réelles) les systèmes linéaires suivants en discutant selon les paramètres  $m$ ,  $a$  et  $b$ .

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = m \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a - 1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 6y - 9z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = a \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ ax + y + bz = 0 \\ bx + ay + z = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + (1 - m)z = m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases} \quad f) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + (2 - a)z = b - 1 \end{cases}$$

**Exercice 6. Résolution avec un second membre général.**

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = a \\ 6x + 2y + z = b \\ 9x + 3y + 7z = c \end{cases}$$

où  $a, b, c$  sont des constantes.

Donner la matrice augmentée  $A$  associée à ce système. Mettre  $A$  sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite. Résoudre le système en fonction de  $a, b, c$ .