Feuille de TD 2 : Matrices

Exercice 1. Produit de matrices.
Calculer les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Matrices 2×2.
Soient deux matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices :
AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$.

Exercice 3. Matrices stochastiques.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si

1. $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j} \geq 0$,

2. $\forall 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable pour le produit matriciel.

Exercice 4. Trace d'une matrice carrée.
Soit $A \in M_n(K)$. On appelle trace de la matrice A, et on note $tr(A)$ l'élément de K, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Montrer que pour toutes matrices A et B dans $M_n(K)$, on a $tr(AB) = tr(BA)$. En déduire que pour toute matrice $P \in GL_n(K)$ on a $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

Exercice 5. Commutant d'une matrice.
Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Calcul d'inverse.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 7. Calcul des puissances d'une matrice.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.

   (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.

(c) En déduire A^n Pour tout entier n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 8. Inversibilité.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?

   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$ (0 étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 9. Calcul pratique du rang d'une matrice.
Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Calcul pratique d'inverse.
Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Matrices du type $I + A$ (Difficile).
Soient A une matrice carrée réelle d'ordre $n \geq 0$. On suppose les matrices A et $I_n + A$ inversibles.

1. Montrer que la matrice $I_n + A^{-1}$ est inversible.

2. Montrer que $(I_n + A^{-1})^{-1} + (I_n + A)^{-1} = I_n$.

Exercice 12. Inverse (Très difficile).
Soient A, B deux matrices de $M_n(K)$, on note I_n la matrice identité.
Montrer que si $I_n - AB$ est inversible alors $I - BA$ l'est également.

Exercice 13. Polynôme annulateur (Difficile).
Soit la mtrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(A-6I)(A^2-3I)=0$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur à 2 tel que :
$$P_n(6) = 6^n, P_n(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n \text{ et } P_n(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$

   Montrer que $A^n = P_n(A)$.

Exercice 14. Matrice à diagonale strictement dominante (Difficile).
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $1 \le i \le n$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible.

Exercice 15. rang d'une matrice en fonction d'un paramètre
Discuter suivant $\lambda \in \mathbb{C}$, le rang de la matrice,
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Deux matrices qui commutent.
Soit $A, B \in M_n(K)$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que A est inversible puis que les matrices A et B commutent.

Exercice 17. Transposition.
Pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée notée $A^{\perp} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et définie par $\left(A^{\perp}\right)_{i,j} = A_{j,i}$.

1. Interpréter cette définition en termes de lignes et de colonnes.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Montrer que A est inversible d'inverse $A^{\perp}$.

Exercice 18. Trace d'une matrice : le retour...
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $tr\left(AA^{\perp}\right) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 19. Matrices nilpotentes.
Soit $A \in M_n(K)$, A est dite nilpotente si il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors $I - A$ est inversible et préciser son inverse.
2. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est également une matrice nilpotente.