Feuille de TD 4 : Applications linéaire, espaces vectoriels de dimension finie, bases

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquez leur noyau et leur image. En déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-3 \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x, 3y+x) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & |z+1|^2 - |z|^2 - 1 \end{cases} \qquad f_6 : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & i\overline{z}+1 \end{cases}$$

$$f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x+4y \end{cases} \qquad f_8 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, 1) \end{cases} \qquad f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xy+x-z, x) \end{cases}$$

$$f_{10} : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) \end{cases} \qquad f_{11} : \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f''-f \end{cases}$$

Les applications f_4, f_5, et f_6 sont-elles linéaires sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel sur K et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\text{Ker }\varphi \cap \text{Im}\varphi = \{0\}$. Montrer que si $x \notin \text{Ker }\varphi$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel sur K et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$. On désigne par I_E l'application identité de E (on notera que c'est un projecteur de E).

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $I_E - p$ est un projecteur de E. Quelles relations y a-t-il entre les images et les noyaux de p et $I_E - p$?
2. Montrer que si p est un projecteur de E, alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.
3. Montrer que si p est un projecteur de E et si f est un endomorphisme de E tel que $f(\text{Im } p) \subset \text{Im } p$ et $f(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$, alors $f \circ p = p \circ f$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur K. Soit $f \in L(E)$ tel que $\text{Im}(f)$ soit une droite vectorielle et $f^2 \neq 0$. Démontrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. En déduire que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exercice 6. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K. Soit $f : E_1 \times E_2 \mapsto E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\text{Ker } f = \{(x_1, -x_1) : x_1 \in E_1 \cap E_2\}$.
3. Montrer que $\text{Ker } f$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.
4. Montrer que f a pour image $E_1 + E_2$.
5. Dans le cadre de la dimension finie, déduire de ce qui précède la formule :

$$\dim\,(E_1 + E_2) + \dim\,(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Familles Libres, Familles Génératrices et Bases

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 8. On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :
• F est l'ensemble des vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) qui satisfont $v_1 = v_2$ et $v_3 = v_4$,
• G est l'ensemble des vecteurs (w_1, w_2, w_3, w_4) qui satisfont $w_1 + w_2 - w_3 = 0$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F et une base de G.

Exercice 9. Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants :
• $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x - 2y + z = 0\}$.
• $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x = 2y = 3z\}$.
• $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
• $E_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\, x + y + z = 0,\, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.
• $E_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ où a, b sont deux réels fixés.

Exercice 10. Soit E un K-espace vectoriel et $f \in L(E)$. Si $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}^*$ vérifient $f^k(x) = 0$ et $f^{k-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ est une famille libre.

Dans les deux exercices suivants on considère N réels ($N \geq 1$), $(a_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$, distincts deux à deux, c'est-à-dire : pour tout indices $1 \leq i \neq j \leq N$ on a $a_i \neq a_j$.

Exercice 11. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note φ_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $|x - a|$.
Montrer que la famille $(\varphi_{a_i})_{1\leq i\leq N}$ est libre.

Exercice 12. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note χ_a, la fonction charactéristique de $[a, +\infty[$.
Rappel $\chi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *elle vaut 1 sur* $[a, +\infty[$ *et est nulle ailleurs.*
Montrer que la famille $(\chi_{a_i})_{1\leq i\leq N}$ est libre.

Exercice 13. Montrer que les vecteurs (a, b) et (c, d) forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 14. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels qui figurent dans les exercices 5, 6 et 10 du $TD3$.

Exercice 15. Soit $V \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions

$$f_1 = x, \quad f_2 = e^x, \quad f_3 = xe^x \quad \text{et} \quad f_4 = (x+1)e^x.$$

1. La famille $(f_1, \ldots, f_4)$ est-elle libre ?
2. Donner une base de V.

Exercice 16. Soit

$$E = \{f_{a,b}(: x \mapsto (ax+b)e^{2x}) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en donner une base.
2. Démontrer que l'ensemble F des fonctions $f_{a,b}$ monotones sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.

Exercice 17. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,0,1,0), \quad v_2 = (0,1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0,0) \quad \text{et} \quad v_4 = (0,0,1,1).$$

1. Donner une base de V et l'étendre en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver une équation cartésienne de V (dans la base canonique).

Exercice 18. Considérons les deux sous-espaces vectoriels

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x + 2y + z = 0\}.$$

Déterminer une base de U, de V et de $U \cap V$.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent à A forment un sous-espace vectoriel dont on donnera une base.

Exercice 20. Soit e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soient $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2+e_3+e_4)$, $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_1 + e_3 + e_4)$, $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_1 + e_2 + e_4)$ et $H = \mathrm{Vect}(e_4, e_1 + e_2 + e_3)$.

1. Quelle est la dimension de ces sous-espaces vectoriels ?
2. Déterminer $E \cap F \cap G \cap H$.

Exercice 21. Soit a un paramètre réel. On pose $X_1 = (1,1,1,1)$, $X_2 = (-a,2,3,a)$ et $X_3 = (a^2,4,9,a^2)$. Calculer le rang de la famille (X_1, X_2, X_3) en fonction de a.

Applications linéaires en dimension finie.

Exercice 22. On définit l'application φ :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+z, 2x+y) \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y + z = 0\}.$$

Calculer $\varphi(F)$.

Exercice 23. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement si elle est de la forme $f(x,y) = ax + by$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif K, et soit u un endomorphisme de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. Ker u = Im u
2. $u^2 = 0$ et dim Ker u = dim Im u = dim $E/2$.