Université Pierre et Marie Curie — 2010-2011

Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 3

Variables aléatoires.

1. On lance un dé tétraédral dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé octaédral dont les faces sont numérotées de 1 à 8. Calculer la loi de la somme S, du produit P et du plus grand M des deux nombres obtenus.

2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $-\log U$.

3. Montrer que

$$\mathbb{P}(dxdy) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy$$

est une mesure de probabilités sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$ et calculer la loi de la variable aléatoire $X(x, y) = x^2 + y^2$.

4. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ. Soit $c > 0$ un réel. Déterminer la loi de cX.

5. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

6. *On étudie des variables aléatoires qui ont une propriété d'absence de mémoire.*

a) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tous $n, m \geq 0$ entiers, on a

$$\mathbb{P}(T \geq n + m) = \mathbb{P}(T \geq n)\mathbb{P}(T \geq m).$$

Que peut-on dire de la loi de T ?

b) Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tous $a, b \geq 0$ réels, on a

$$\mathbb{P}(S > a + b) = \mathbb{P}(S > a)\mathbb{P}(S > b).$$

Que peut-on dire de la loi de S ?

7. Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire *Hamlet*, c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?

On rappelle que la mesure de Lebesgue, notée Leb*, est l'unique mesure borélienne sur* $\mathbb{R}$ *qui, pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$*, associe à l'intervalle ouvert* $]a, b[$ *la mesure* $b - a$*.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on appelle partie entière de* x *et on note* $\lfloor x \rfloor$ *l'unique entier relatif tel que* $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$*. On note* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ *la partie fractionnaire de* x*.*

8. On considère l'espace de probabilités $([0, 1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \mathsf{Leb})$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une variable X_n à valeurs réelles en posant

$$\forall x \in [0, 1[, \; X_n(x) = \lfloor 2\{2^{n-1}x\} \rfloor.$$

a. Représenter le graphe de X_1, X_2, X_3 vues comme fonctions de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
b. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \geq 1$.
c. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$. On pose $a = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_k$ et $b = a + 2^{-n}$. Montrer que

$$\{x \in [0, 1[: X_1(x) = \varepsilon_1, \ldots, X_n(x) = \varepsilon_n\} = [a, b[.$$

En déduire la loi de la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $\{0, 1\}^n$.
La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$*, définie sur l'espace de probabilités* $([0, 1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \mathsf{Leb})$*, constitue donc un jeu de pile ou face infini.*
d. Montrer que la plus petite tribu sur $[0, 1]$ qui contienne tous les ensembles $\{x \in [0, 1[: X_n(x) = \varepsilon\}$ pour $n \geq 1$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$ est la tribu borélienne.