Université Pierre et Marie Curie
License LM345 Année 2010-2011
PIMA

Correction Contrôle continu numéro 2.

Exercice 1.
Soit X une variable exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y.

X est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^+$ (car de loi exponentielle), donc $Y = \lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de Y, variable aléatoire discrète, est déterminée par la famille des $\mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{N}$.
Or, $\{Y = k\} = \{k \leq X < k+1\}$. D'où,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(k \leq X < k+1) \\ &= \int_k^{k+1} \theta e^{-\theta x} dx \\ &= e^{-\theta k}(1 - e^{-\theta}) \\ &= \left(e^{-\theta}\right)^k (1 - e^{-\theta}).\end{aligned}$$

Y suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $e^{-\theta}$.

Exercice 2.
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrées réduites. Quelle est la loi de $\frac{Y}{X}$? Que dire de son espérance.

Remarquons tout d'abord que $\frac{Y}{X}$ est définie presque surement car $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Pour déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{Y}{X}$ on a besoin de la loi du couple (X, Y). Icic, X et Y sont indépendantes, chacune de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On sait donc que la loi de la variable couple est également à densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Nous allons déterminer cette loi à l'aide de la méthode de la fonction muette. Soit donc f une fonction borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y}{X}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{x}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

L'expression $f(\frac{y}{x}) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ étant invariante par l'application $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, il suffit de calculer cette intégrale sur le demiplan (puis de la multiplier par 2) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(\frac{y}{x}) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Soit

$$\begin{array}{rccc}\varphi : &]0, \infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \infty[\times\mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (u, v) \triangleq (x, \frac{y}{x}).\end{array}$$

φ est un C^1 difféomorphisme car différentiable et inversible d'inverse

$$\begin{array}{rccc}\varphi^{-}1 : &]0, \infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \infty[\times\mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & (u, v) \triangleq (u, uv).\end{array}$$

application C^1 également.

Le calcul du Jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$\begin{aligned}\frac{D(x,y)}{D(u,v)} &= \begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial x/\partial u & \partial x/\partial v\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}1 & 0 \\ v & u\end{vmatrix} \\ &= u\end{aligned}$$

La valeur absolue du Jacobien,$|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}|$, est donc égale à u (car $u \geq 0$).

Donc en appliquant la formule du changement de variable, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{u=0}^{\infty}\int_{v\in\mathbb{R}} f(v)e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2}}ududv.$$

f étant bornée et $e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2}}u$ étant l' expression d'une fonction intégrable sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$. Le théorème de Fubini s'applique et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{u=0}^{\infty}\int_{v\in\mathbb{R}} f(v)e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2}}ududv &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(v)\int_{u=0}^{\infty} ue^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2}}dudv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(v)\left[\frac{-1}{1+v^2}e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2}}\right]_{u=0}^{\infty} dudv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(v)\frac{1}{1+v^2}dv\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y}{X}\right)\right) &= 2.\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(v)\frac{1}{1+v^2}dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(v)\frac{1}{1+v^2}dv\end{aligned}$$

Donc la variable aléatoire possède la densité $v \mapsto \frac{1}{\pi(1+v^2)}$: elle suit la loi de Cauchy. Nous avions vu (TD 5 exerice 3) que la loi de Cauchy n'admet pas de moment d'ordre 1. La variable aléatoire $\frac{Y}{X}$ n'est donc pas intégrable et donc son espérance n'est pas définie.