Université Pierre et Marie Curie — 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 10

Loi des grands nombres.

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 0$, on définit la fonction $b_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in [0,1],\ b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire

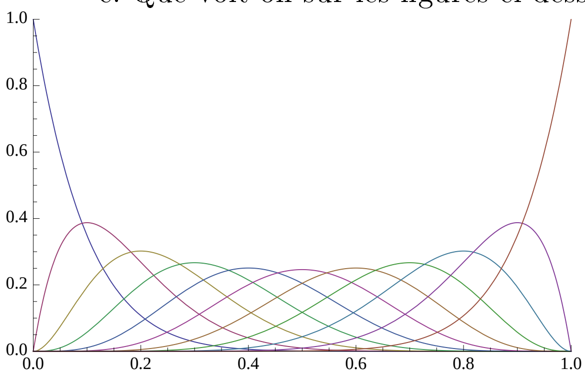
$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$

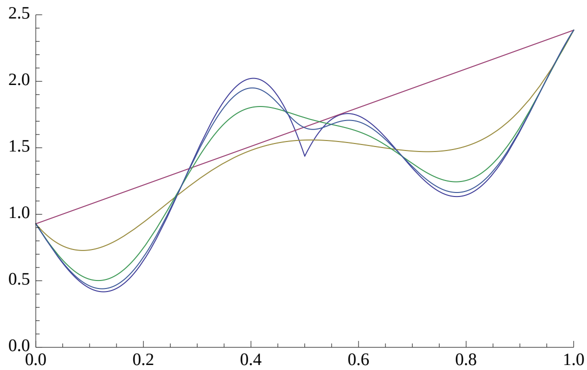
que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(b_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

b. On suppose f lipschitzienne, c'est-à-dire qu'on suppose l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous $x, y \in [0,1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire

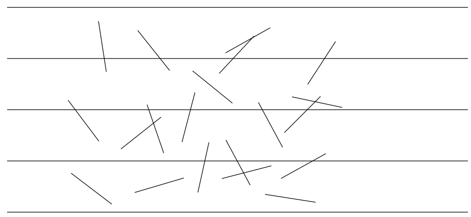
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|b_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

c. Que voit-on sur les figures ci-dessous ?





3. Pour calculer une valeur approchée de π, le naturaliste Buffon (1707-1788) proposa de laisser tomber sur un plancher fait de planches parallèles et toutes de la même largeur une boîte d'aiguilles de longueur égale à la largeur des planches.



Notant alors n le nombre total d'aiguilles et N le nombre, aléatoire, d'aiguilles qui tombaient à cheval sur deux planches consécutives, il proposa l'approximation suivante :

$$\pi \simeq \frac{2n}{N}.$$

Proposer un modèle rigoureux de cette expérience et justifier la formule de Buffon.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} X_n 10^{-n}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

b. Soit $p \geq 1$ un entier. Pour tout $l \geq 0$, on note Y_l le vecteur aléatoire $(X_{lp+1}, \ldots, X_{lp+p})$. Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ un p-uplet d'éléments de $\{0, \ldots, 9\}$. Montrer qu'avec probabilité 1, on a

$$\frac{1}{n}\text{Card}\,\{l \leq n : Y_l = (a_1, \ldots, a_p)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

c. L'entier $p \geq 1$ étant toujours fixé, on choisit un entier $r \in \{1, \ldots, p\}$ et on pose, pour tout $l \geq 1$, $Z_l = (X_{lp+r}, \ldots, X_{lp+r+p-1})$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\text{Card}\,\{l \leq n : Z_l = (a_1, \ldots, a_p)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

d. Déduire de ce qui précède que pour tout $(a_1, \ldots, a_p) \in \{0, \ldots, 9\}^p$, on a presque sûrement

$$\frac{1}{n}\text{Card}\,\{k \leq n : X_{k+1} = a_1, \ldots, X_{k+p} = a_p\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

e. Montrer qu'il existe un ensemble $N \subset [0,1[$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout réel $x \in [0,1[\backslash N$, l'écriture décimale $x = 0, x_1x_2\ldots$ de x vérifie

$$\forall p \geq 1,\ \forall a_1, \ldots, a_p \in \{0, \ldots, 9\},\ \frac{1}{n}\text{Card}\,\{k \leq n : x_{k+1} = a_1, \ldots, x_{k+p} = a_p\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

f. Montrer qu'il existe un réel x dont l'écriture décimale vérifie la propriété ci-dessus.