Université Pierre et Marie Curie | 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 | Feuille 10

Loi des grands nombres.

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution de l'exercice 1. La fonction f, continue sur le segment $[0,1]$, y est bornée. Ainsi, les variables aléatoires $(f(U_n))_{n\geq 1}$ sont indépendantes, de même loi et admettent un moment d'ordre 1. On peut leur appliquer la loi forte des grands nombres (puisque la fonction f est bornée, les variables admettent un moment d'ordre 2 et on est même dans le cas dont on a étudié la démonstration en cours) pour trouver que $\frac{f(U_1)+\ldots+f(U_n)}{n}$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers

$$\mathbb{E}[f(U_1)] = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Cette méthode est parfois utilisée pour calculer des valeurs approchées d'intégrales et s'appelle la *méthode de Monte-Carlo*.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 0$, on définit la fonction $b_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in [0,1],\ b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire

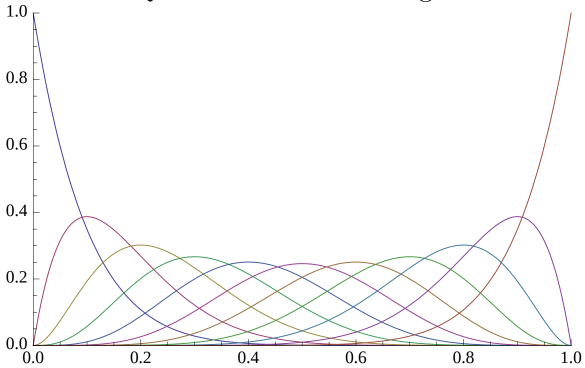
$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$

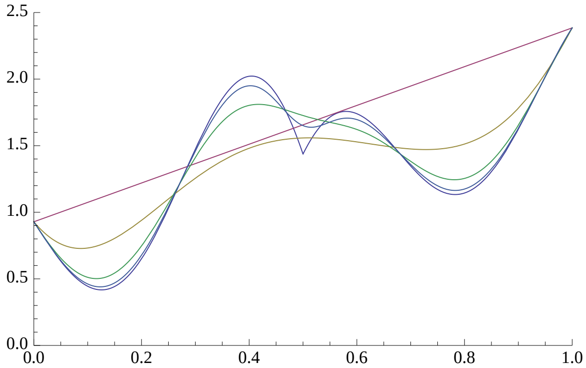
que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(b_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

b. On suppose f lipschitzienne, c'est-à-dire qu'on suppose l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous $x, y \in [0,1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|b_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

c. Que voit-on sur les figures ci-dessous ?





Solution de l'exercice 2. a. Soit $x \in [0,1]$. On observe que $b_n(x) = \mathbb{E}[f(B/n)]$, où B suit la loi binomiale de paramètres n et x. Considérons donc $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre x. On a

$$b_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)\right].$$

D'après la loi des grands nombres, $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ tend presque sûrement, quand n tend vers l'infini, vers $\mathbb{E}[X_1] = x$. Puisque f est continue, $f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)$ tend donc presque sûrement vers $f(x)$. Enfin, puisque f est continue sur $[0,1]$, elle est bornée. La convergence presque sûre de $f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)$ vers $f(x)$ est donc dominée par le supremum de f et le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que

$$b_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

b. On cherche à majorer la différence $|b_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x. Supposons que f soit K-lipschitzienne. On a

$$\begin{aligned} |b_n(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \\ &\leq K\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - x\right|\right]. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que pour tout variable aléatoire positive Y, on a $\mathbb{E}[Y] \leq$

$\mathbb{E}[Y^2]^{\frac{1}{2}}$. On a donc

$$\begin{aligned}
|b_n(x) - f(x)| &\leq K\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= K\left[\mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} \\
&= \frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{x(1-x)} \\
&\leq \frac{K}{2\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

car $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Nous avons donc obtenu une majoration de l'erreur indépendante de x : on a

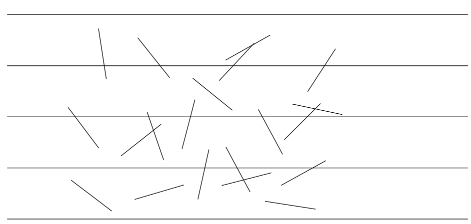
$$\|b_n - f\|_\infty \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

En particulier, il y a convergence uniforme de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ vers f.

c. Sur la figure de gauche, on voit les polynômes $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ pour $n = 10$ et $k \in \{0, \ldots, 10\}$. Ces polynômes s'appellent les polynômes de Bernstein. Sur l'intervalle $[0, 1]$, ils ont en particulier la propriété d'être positifs et de somme égale à 1.

Sur la figure de droite, on voit le graphe d'une fonction continue f et des approximations successives de cette fonction. Le graphe de f est la seule courbe qui ne soit pas dérivable en un point. On a tracé quatre approximations de f, en l'occurence b_1, b_{10}, b_{50} et b_{200}.

3. Pour calculer une valeur approchée de π, le naturaliste Buffon (1707-1788) proposa de laisser tomber sur un plancher fait de planches parallèles et toutes de la même largeur une boîte d'aiguilles de longueur égale à la largeur des planches.



Notant alors n le nombre total d'aiguilles et N le nombre, aléatoire, d'aiguilles qui tombaient à cheval sur deux planches consécutives, il proposa l'approximation suivante :

$$\pi \simeq \frac{2n}{N}.$$

Proposer un modèle rigoureux de cette expérience et justifier la formule de Buffon.

Solution de l'exercice 3. Notons l la largeur des planches du plancher, qui est aussi la longueur des aiguilles. Appelons *rainures* du plancher les droites le long desquelles deux planches successives se touchent. Les rainures sont toutes parallèles et également espacées. Supposons que les rainures soient orientées est-ouest.

Considérons une aiguille sur le plancher. Sauf si elle orientée exactement est-ouest, elle a un point qui est plus au sud que tous les autres, et ce point est une extrémité. Nous orientons l'aiguille de cette extrémité vers l'autre. Elle indique alors une direction que nous pouvons représenter par un angle θ compris entre 0 et π. Par exemple, cet angle vaut $\pi/4$ si l'aiguille pointe vers le nord-est. Si l'aiguille est exactement orientée est-ouest, nous convenons de prendre $\theta = 0$. Ainsi, dans tous les cas, θ appartient à $[0, \pi[$.

Pour décrire complètement la position de l'aiguille, il nous faut connaître une distance, que nous prenons comme étant celle entre l'extrémité méridionale (la plus au sud) de l'aiguille et la rainure située immédiatement au nord de cette extrémité. Cette distance d est comprise entre 0 et l, plus précisément, d appartient à $[0, l[$. Si l'aiguille est orientée est-ouest, on prend pour d la distance entre une quelconque de ses extrémités et la rainure immédiatement au nord de celle-ci ; cette distance est la même pour les deux extrémités.

Il est naturel de supposer que l'angle avec lequel l'aiguille tombe est uniforme dans $[0, \pi[$, que la distance entre l'extrémité la plus au sud et la rainure immédiatement au nord est uniforme dans $[0, l[$, et que ces deux quantités sont indépendantes. Ceci correspond à une distribution des aiguilles qui ne dépend pas de l'orientation particulière des lattes du plancher ni de leur position exacte le long de l'axe nord-sud.

Ainsi, notre espace de probabilités est $\Omega = [0, \pi[\times[0, l[$, muni de la tribu borélienne, et de la mesure $\mathbb{P}(d\theta\ dr) = \frac{1}{l\pi} d\theta dr$.

L'événement qui nous intéresse est l'événement où l'aiguille croise une rainure. Ceci a lieu si et seulement si l'inégalité

$$l \sin\theta \geq r$$

est vérifiée. Ainsi, la probabilité qu'une aiguille donnée croise une rainure est

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{(\theta, r) \in [0, \pi[\times[0, l[: l\sin\theta \geq r\}) &= \frac{1}{l\pi} \int_{[0,\pi[\times[0,l[} \mathbb{1}_{r \leq l \sin\theta}\ d\theta dr \\
&= \frac{1}{l\pi} \int_0^\pi l \sin\theta\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette probabilité ne dépend pas de l.

On lance n aiguilles sur le plancher. On peut considérer qu'il s'agit de n réalisations indépendantes de l'expérience consistant à en lancer une. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, notons A_k l'événement où la k-ième aiguille croise une rainure. La proportion d'aiguilles qui croisent une rainure est

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, puisque les $(A_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants, ceci converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}] = \mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{\pi}$.

Ainsi, lorsque n est grand, on a $\frac{N}{n} \simeq \frac{2}{\pi}$, si bien que $\pi \simeq \frac{2n}{N}$.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} X_n 10^{-n}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

b. Soit $p \geq 1$ un entier. Pour tout $l \geq 0$, on note Y_l le vecteur aléatoire $(X_{lp+1}, \ldots, X_{lp+p})$. Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ un p-uplet d'éléments de $\{0, \ldots, 9\}$. Montrer qu'avec probabilité 1, on a

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{l \leq n : Y_l = (a_1, \ldots, a_p)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

c. L'entier $p \geq 1$ étant toujours fixé, on choisit un entier $r \in \{1, \ldots, p\}$ et on pose, pour tout $l \geq 1$, $Z_l = (X_{lp+r}, \ldots, X_{lp+r+p-1})$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{l \leq n : Z_l = (a_1, \ldots, a_p)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

d. Déduire de ce qui précède que pour tout $(a_1, \ldots, a_p) \in \{0, \ldots, 9\}^p$, on a presque sûrement

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{k \leq n : X_{k+1} = a_1, \ldots, X_{k+p} = a_p\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

e. Montrer qu'il existe un ensemble $N \subset [0, 1[$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout réel $x \in [0, 1[\backslash N$, l'écriture décimale $x = 0, x_1 x_2 \ldots$ de x vérifie

$$\forall p \geq 1,\ \forall a_1, \ldots, a_p \in \{0, \ldots, 9\},\ \frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{k \leq n : x_{k+1} = a_1, \ldots, x_{k+p} = a_p\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10^p}.$$

f. Montrer qu'il existe un réel x dont l'écriture décimale vérifie la propriété ci-dessus.

Solution de l'exercice 4. a. On a presque sûrement $|X_n| \leq 9$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\sum_{n\geq 1} |X_n 10^{-n}| \leq \sum_{n\geq 1} 9.10^{-n} = 1.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} X_n 10^{-n}$ est presque sûrement absolument convergente, donc convergente.

Pour calculer la loi de la somme X de cette série, calculons sa fonction de répartition. Tout d'abord, on a $0 \leq X \leq 1$ presque sûrement. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \ldots, 10^n - 1\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{k}{10^n} \leq X < \frac{k+1}{10^n}\right) = \mathbb{P}(X_1 = k_{n-1}, \ldots, X_n = k_0) = 10^{-n},$$

où $k_{n-1}\dots k_0$ est l'écriture décimale de l'entier k. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, 10^n - 1\}$, la fonction de répartition F_X de X satisfait

$$F_X(k.10^{-n}) = k.10^{-n}.$$

Puisque cette fonction est continue à droite, elle coïncide avec la fonction identité sur $[0, 1]$, donc X a la loi uniforme sur $[0, 1]$.

b. Les vecteurs aléatoires $(Y_l)_{l\geq 0}$ sont indépendants, de loi uniforme sur $\{0, \dots, 9\}^p$. Soit $(a_1, \dots, a_p)$ un p-uplet d'éléments de $\{0, \dots, 9\}$. Pour chaque l, notons A_l l'événement $\{Y_l = (a_1, \dots, a_p)\}$. Les événements $(A_l)_{l\geq 0}$ sont independants et de probabilité 10^{-p}. La loi forte des grands nombres entraîne donc

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \frac{1}{10^p}.$$

Le membre de gauche est exactement le nombre d'entiers $l \geq n$ tels que $Y_l = (a_1, \dots, a_p)$.

c. Le fait d'avoir décalé les indices de r ne change rien. Le raisonnement de la question précédente s'applique mot pour mot.

d. Soit $(a_1, \dots, a_p)$ un p-uplet de chiffres. Écrivons $n = mp + s$ avec $m \geq 0$ et $0 \leq s \leq p - 1$. Pour tous $l \geq 0$ et $r \in \{1, \dots, p\}$, notons $A_{l,r}$ l'événement

$$A_{l,r} = \{X_{lp+r} = a_1, \dots, X_{lp+r+p-1} = a_r\}.$$

La quantité dont on souhaite déterminer la limite est

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{m-1} \mathbb{1}_{A_{l,r}} + \frac{\mathbb{1}_{A_{m,1}} + \dots + \mathbb{1}_{A_{m,s}}}{n}.$$

Le terme de droite est inférieur à $\frac{p}{n}$ et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Pour chaque r compris entre 1 et p, la moyenne $\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \mathbb{1}_{A_{l,r}}$ tend vers 10^{-p} lorsque m tend vers l'infini. Or, lorsque n tend vers l'infini, m tend vers l'infini et $\frac{m}{n}$ tend vers $\frac{1}{p}$. Ainsi, la limite cherchée est

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{1}{p} \frac{1}{10^p} = \frac{1}{10^p}.$$

e. Considérons l'espace de probabilités $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Pour tout x irrationnel appartenant à $[0, 1]$, le développement décimal de x est unique. On note $X_1(x), X_2(x), \dots$ les décimales successives de x. On définit ainsi, presque partout, une suite de variables aléatoires. Pour tout $n \geq 1$ et tous $a_1, \dots, a_n$, on a

$$\text{Leb}(\{x \in [0, 1] : X_1(x) = a_1, \dots, X_n(x) = a_n\}) = \text{Leb}([0, a_1 \dots a_n; 0, a_1 \dots a_n + 10^{-n}[) = 10^{-n}.$$

Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ ainsi définies sont donc bien indépendantes et uniformes sur $\{0, \dots, 9\}$. On peut donc leur appliquer les résultats précédents.

Pour chaque $p \geq 1$ et chaque p-uplet $(a_1, \ldots, a_p)$ de chiffres, la convergence établie à la question précédente a lieu presque sûrement. Il existe donc une partie $N_{p,a_1,\ldots,a_p}$ de $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue nulle hors de laquelle la convergence établie à la question précédente a lieu. L'ensemble

$$N = \bigcup_{p \geq 1} \bigcup_{(a_1,\ldots,a_p) \in \{0,\ldots,9\}^p} N_{p,a_1,\ldots,a_p},$$

union dénombrable d'ensemble négligeables, est négligeable. Tout réel compris entre 0 et 1 et qui n'appartient pas à cet ensemble a la propriété voulue.

f. Puisque l'ensemble des réels compris entre 0 et 1 qui vérifient la propriété est de mesure 1, il n'est pas vide. Il existe donc des réels qui ont cette propriété. Il n'est cependant pas facile d'en construire un explicitement et le raisonnement que nous venons de faire est sans doute la manière la plus simple d'en prouver l'existence. C'est un exemple d'utilisation d'un argument probabiliste pour prouver l'existence d'un objet aux propriétés particulières.