Université Pierre et Marie Curie — 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 11

Convergence en loi, TCL.

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

Solution de l'exercice 1. Tout d'abord, $f(X_n)$ est bien une variable aléatoire comme composée de la variable aléatoire X_n et de l'application f qui est continue. Si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue bornée, remarquons que $\varphi \circ f$ est également continue bornée. L'hypothèse de convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique $\lim \mathbb{E}[\varphi \circ f(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi \circ f(X)]$ que l'on peut écrire $\lim \mathbb{E}[\varphi(f(X_n))] = \mathbb{E}[\varphi(f(X))]$. Ceci étant valable pour toute φ continue bornée, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

2.

a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle constante a. Montrer que la convergence a lieu aussi en probabilité.

b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de même loi de Cauchy de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n)_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n} S_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n^2} S_n)_{n\geq 1}$.

Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

Solution de l'exercice 2.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et f_ε définie par $f(x) = \mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[^c}(x) + \frac{1}{\varepsilon}|x-a|\mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$. Cette fonction est continue bornée, donc la suite $(\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)])_{n\geq 1}$ converge vers $\mathbb{E}[f_\varepsilon(a)] = 0$. Comme

$$\mathbb{P}(|X_n - a \geq \varepsilon|) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[^c}(X_n)] \leq \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)],$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.

b) La fonction caractéristique de $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ est donnée par

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} S_n}] = \left(\mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}} X_1}]\right)^n = e^{-|t|\sqrt{n}},$$

car les X_n sont indépendantes. Comme la suite $\left(e^{-|t|\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ tend vers $1_{\{0\}}(t)$ qui définit une application non continue en 0. Donc la limite des fonctions caractéristiques n'est pas une fonction caractéristique, et $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$ ne converge ni en loi, ni en probabilité.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n}S_n$ est $\phi(t) = e^{-|t|}$. La suite $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire de loi de Cauchy. Mais elle ne converge pas en probabilité. En effet, sinon, la suite $(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n})_{n\geq 1}$ convergerait en probabilité, donc aussi en loi, vers 0. Or, la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n}$ est donnée par $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{2n}(X_1+\cdots+X_n-(X_{n+1+}\cdots+X_{2n}))}] = e^{-|t|}$, qui ne converge pas vers 1, fonction caractéristique de la variable aléatoire 0.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n^2}S_n$ est $\phi(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$ qui converge vers 1. Ainsi, la suite $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et donc en probabilité vers 0.

3. Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux variables aléatoires réelles.

a) Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(|Y_n > a|) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(|Y_n|)|e^{itY_n} - 1|].$$

b) Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

c) Montrer que la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X n'implique pas la convergence en loi de $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

Solution de l'exercice 3.

a) Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| &= |\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - 1)]| \leq \mathbb{E}[|e^{itY_n} - 1|] \\
&= \int_{\{|Y_n|>a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P} \\
&\leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

b) En fait, Y_n converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a_0 > 0$ tel que pour $y \leq a_0$, $|e^{it} - 1| \leq \varepsilon$. De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > a_0) \leq \varepsilon$. Donc, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 3\varepsilon$. La convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique qu'il existe n_1 (que l'on peut prendre plus grand que n_0), tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n}(t) - \phi_X(t)| \leq \varepsilon$. On a montré que pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t)| \leq 4\varepsilon$ d'où la convergence en loi demandée.

c) On prend X de loi symétrique (X a la même loi que $-X$), et on pose $X_n = -X$. Alors X_n converge en loi vers X, mais $X_n - X$ converge en loi vers $-2X$.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Rappeler la loi de S_n et calculer la limite de la suite $\left(e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$.

Solution de l'exercice 4.

5. Formule de Stirling

Soit a>0.

a) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de carré intégrable, on a

$$\mathbb{E}[|X - \inf(X,a)|] \leq \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\geq a\}}] \leq (\mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X \geq a))^{1/2}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

b) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}[Y_n^2]$. En déduire que $\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$.

c) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. En déduire que $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^- et que la suite $(\inf(Y_n^-, a))_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\inf(Y^-, a)$.

d) A l'aide de la question a), montrer que la suite $(\mathbb{E}[Y_n^-])_{n\geq 1}$ converge vers $\mathbb{E}[Y^-]$.

e) Calculer $\mathbb{E}[Y^-]$ et $\mathbb{E}[Y_n^-]$ pour tout $n \geq 1$. En déduire la formule de Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{n!} = 1.$$

Solution de l'exercice 5.

6. 1. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels dans $]0,1[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. telles que pour tout n : $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de Poisson paramètre λ. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles indépendatntes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Etudier le comportement asymptotique en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{k}X_k$.

Solution de l'exercice 6. 1. Afin de montrer la convergence en loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ vers X. Montrons que $\phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où ϕ_X designe la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X.

$$
\begin{aligned}
\phi_{X_n}(t) &= \left(1 - p_n + p_n e^i t\right)^n \\
&= \exp\left(n \ln(1 - p_n + p_n e^i t)\right) \\
&= \exp\left(-np_n(1 - e^i t) + np_n \epsilon_n\right) \quad \text{où } \epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
&\sim_n \exp\left(-np_n(1 - e^i t)\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t).
\end{aligned}
$$

2. Vu la forme de la variable de Y_n, on est tenté d'appliquer la loi des grands nombres. Cependant on ne peut pas l'appliquer car les variables $\sqrt{k}X_k$ ne sont pas identiquement distribuées. On va donc à nouveau utiliser les fonctions caractéristiques afin de démontrer un résultat de convergence en loi. Les variables aléatoires X_n sont indépendantes, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$
\phi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}\left(\frac{\sqrt{k}}{n} t\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{-kt^2/n^2} = e^{-\frac{n(n+1)}{2n^2}t^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2/2}.
$$

On a donc montré que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

7. On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

Solution de l'exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d de paramètre $1/30$. On a alors $\mathbb{E}[X_1] = 30$ et $Var(X_1) = 900$. X_n représente le temps (en minutes) qui sépare le passage de la $(n-1)$ième voiture de la $n-$ième voiture. On considère ensuite $S_n = X_1 + \ldots X_n$. S_n donne l'instant de passage de la $n-$ième voiture. On veut déterminer

$$
\mathbb{P}[S_{50} \leq 24 \times 60].
$$

Or on a

$$
\mathbb{P}[S_{50} \leq 24 \times 60] = \mathbb{P}\left[\frac{S_{50} - 50 \times 30}{30 \times \sqrt{50}} \leq \frac{24 \times 50 - 50 \times 30}{30 \times \sqrt{50}}\right] \approx F\left(-\frac{-2}{\sqrt{50}}\right),
$$

où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, l'approximation étant donnée par le TCL. Deplus $F\left(-\frac{-2}{\sqrt{50}}\right) \approx F(-0.283) = 1 - F(0.283)$. En utilisant une table ou un logiciel on obtient $F(0.283) \approx 0.61$. On a donc $\mathbb{P}[S_{50} \leq 24 \times 60] \approx 0.39$.