Université Pierre et Marie Curie 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 Feuille 12

Convergence en loi, TCL (bis).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

2. Un marchand d'accessoires de magie vend des dés de deux sortes : des dés équitables et des dés pipés où le chiffre 6 sort avec probabilité 1/5. Dans le dernier lot que son fabricant lui a envoyé, le fabricant a oublié d'étiqueter les dés. Le marchand ne sait donc pas quel dé est de quelle sorte.

Pour les départager, il les prend un à un, les lance mille fois chacun et note le nombre de fois où il a obtenu 6. Il décide d'étiqueter "équitable" tout dé qui donne moins de 183 fois 6 et "pipé" un dé qui donne plus de 184 fois 6. En effet, raisonne-t-il, $183 \simeq \frac{1}{2}(1000 * \frac{1}{6} + 1000 * \frac{1}{5})$.

a. Quelle proportion des dés équitables étiquette-t-il comme pipés ? Et quelle proportion des dés pipés comme équitables ?

b. Le marchand sait que dans le lot qu'il a reçu, il y a à peu près autant de dés pipés que de dés équitables. Le seuil de 183 est-il celui qui lui fait commettre au total le moins d'erreurs ?

On pourra utiliser les valeurs suivantes de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

x	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
$\Phi(x)$	0.841	0.853	0.864	0.875	0.885	0.894	0.903	0.911	0.919	0.926	0.933

3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et de carré intégrable. On suppose que leur loi a la propriété suivante : $X_1 + X_2$ a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

a. Exprimer, pour tout $n \geq 0$, la loi de $X_1 + \ldots + X_{2^n}$ en fonction de celle de X_1.

b. Déterminer la loi commune des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$.

4. Soit X une variable aléatoire réelle. Déterminer à quelle condition sur X la fonction caractéristique de X ne prend que des valeurs réelles.

5. Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est exponentielle ou la masse de Dirac en 0.