Université Pierre et Marie Curie — 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 1

Opérations sur les ensembles, dénombrement.

1. Soient E, F et G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $h : F \to E$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ h = \mathrm{id}_F$.

C'est parfois le moyen le plus simple de prouver qu'une application est bijective.

Solution de l'exercice 1. Supposons $g \circ f$ injective. Alors, si x_1 et x_2 sont des éléments distincts de E, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, ce qui implique (la contraposée est évidente) $f(x_1) \neq f(x_2)$. Autrement dit, f est injective.

Supposons maintenant $g \circ f$ surjective. Pour tout $z \in G$, on peut trouver $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. En particulier cela nous fournit $y = f(z)$ qui est un élément de F tel que $g(y) = z$, ce qui prouve la surjectivité de g.

Pour l'équivalence à démontrer, commençons par le sens $\Leftarrow$. Supposons qu'il existe $h : F \to E$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_E$. Comme id_E est injective, la première question de l'exercice permet de conclure que f aussi est injective. De même, l'existence de h telle que $f \circ h = \mathrm{id}_F$ est surjective entraine que f est surjective. On a donc démontré que f était bijective, comme on voulait.

Passons maintenant au sens direct. On suppose donc f surjective. Chaque y de F est atteint au moins une fois par f (parce que f est surjective), et en fait une seule fois (parce que f est injective). Autrement dit pour chaque y de F il existe un unique x, que l'on appelle $h(y)$ tel que $f(x) = y$. Par construction, on a bien $f(h(y)) = f(x) = y$ pour tout $y \in F$. Pour tout $x \in E$, si on note $y := f(x)$, alors par définition de h, on a bien $h(y) = x$. D'où $h(f(x)) = h(y) = x$, ce qui termine la démonstration.

2. Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E. Montrer par des contrexemples qu'on n'a en général ni $f(A^c) \subset f(A)^c$ ni $f(A)^c \subset f(A^c)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur f pour que pour toute partie B de E on ait $f(B^c) \subset f(B)^c$. Faire de même avec l'inclusion contraire.

Solution de l'exercice 2. Pour obtenir un contre-exemple à $f(A) \subset f(A^c)$ (que l'on peut aussi écrire $f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$, il suffit de considérer f une application constante de E (à au moins 2 éléments) dans F réduit à un élément. Si A est une partie de E non vide et distincte de E, on a alors $f(A) = f(A^c) = F$.

Pour l'autre inclusion, qui équivaut à $f(A) \cup f(A^c) = F$, n'importe quelle application non surjective fournit un contre-exemple. En effet, pour tout $A \subset E$, on a $f(A) \cup f(A^c) = f(E) \subsetneq F$.

Une CNS pour la première que la première inclusion soit valable pour toute partie est l'injectivité de f. Il s'agit bien d'une condition suffisante : un élément de $f(A) \cap f(A^c)$ admettrait par définition un antécédent par f dans A et un dans A^c, donc au moins deux antécédents distincts (puis que ces parties sont disjointes). Si f est injective, c'est impossible et donc $f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$. La condition est nécessaire, car si f n'est pas injective, on dispose alors d'un élément $y \in F$ admettant au moins 2 antécédents distincts $x_1, x_2 \in F$. En prenant $A := \{x_1\}$, on obtient $f(A) \cap f(A^c) = \{y\} \neq \emptyset$.

Comme pour tout $A \subset E$, $f(A) \cup f(A^c) = f(A \cup A^c) = f(E)$, la seconde inclusion équivaut à $f(E) = F$. Une CNS est donc que f soit surjective.

3. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit la *fonction indicatrice* de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection. En déduire que $\mathscr{P}(E)$ est fini si E est fini et calculer son cardinal.

Solution de l'exercice 3. Si f est une fonction indicatrice (autrement dit une fonction $E \to \{0,1\}$), on peut lui associer la préimage A de $\{1\}$ par f. On a alors, pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Autrement dit f est la fonction indicatrice de A.

On peut aussi partir d'un ensemble A, considérer sa fonction indicatrice f, puis la préimage par celle-ci de $\{1\}$, dont on vérifie facilement (grâce à la même équivalence) qu'il s'agit de A.

L'exercice 1 permet ce conclure que l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection, et que sa réciproque est l'application qui à une indicatrice associe la préimage de $\{1\}$.

En particulier si E est fini, on a $\#\mathscr{P}(E) = \#(\{0,1\}^E) = 2^{\#E}$.

4. Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$. En écrivant $A \cup B$ en fonction de A^c et B^c, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

On observera que si A est finie, $|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$.

Solution de l'exercice 4. On note $\mathbb{1} := \mathbb{1}_E$ la fonction constante égale à 1 sur E (souvent identifiée à 1).

On vérifie facilement que $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Comme $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, les formules précédentes donnent :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1} - ((\mathbb{1} - \mathbb{1}_A)(\mathbb{1} - \mathbb{1}_B)) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

5. Soit E un ensemble. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E. Montrer que

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

C'est la formule d'*inclusion-exclusion.*

En appliquant cette formule à un ensemble et à des parties bien choisies, établir une formule pour le nombre de surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ pour tous n et p entiers.

Solution de l'exercice 5. Comme dans l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} &= (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1})(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_2}) \ldots (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_n}) \\
&= \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \prod_{i \in I} (-\mathbb{1}_{A_i}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}, \#I = k} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \\
&= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

En sommant sur tous les éléments $x \in E$ la valeur en x du membre de gauche, on obtient $\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$, et en faisant la même chose pour le membre de droite on obtient l'expression voulue.

Pour $i = 1, \ldots, n$, on note A_i l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ qui ne prennent pas la valeur i. On applique la formule précédente. Si $0 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, alors $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ qui ne prennent pas les valeurs $i_1, i_2, \ldots, i_k$. On peut identifier ces applications (via une bijection naturelle) aux applications $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n-k\}$ (ou dans $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ qui a le même cardinal $n - k$). En particulier, il y en a $(n-k)^p$, et le nombre de surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ vaut :

$$\begin{aligned}
\#\left((A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c\right) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)^p \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p.
\end{aligned}$$

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre d'applications bijectives $f : E \to E$ telles que pour tout $x \in E$ on ait $f(x) \neq x$.

Quelle est la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la proportion de bijections de E dans E qui ont cette propriété ?

Solution de l'exercice 6. On peut supposer sans perte de généralité que $E = \{1, \ldots, n\}$. On procède comme à l'exercice précédent, mais avec $A_i := \{f : E \to E : f(i) = i\}$ l'ensemble des applications bijectives de E dans lui même qui fixent i. Alors, pour $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des applications bijectives de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ qui fixent $i_1, \ldots, i_k$, et qui sont donc entièrement déterminées par leurs valeurs sur les autres points de E. Ces applications qui ont (au moins) k points fixes s'identifient naturellement à des applications bijectives de $\{1, \ldots, n-k\}$ (ou de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ qui a le même cardinal $n-k$) dans lui même. Il y en a donc $(n-k)!$.

Par la formule de l'exercice précédent, on obtient que le nombre de d'applications bijectives sans points fixes de E dans lui même vaut :

$$\begin{aligned}
\#\left((A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c\right) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Lorsqu'on divise par $n!$ pour obtenir la proportion de bijections de E qui n'ont pas de point fixe, on reconnait le développement à l'ordre n de $\exp(x)$ pour $x = -1$, qui converge donc vers $1/e$ lorsque $n \to \infty$.

7. Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de paires ? De brelans ? De full (cinq cartes contenant une paire et un brelan) ?

En tirant trois cartes successivement avec remise, de combien de façons peut-on tirer trois cartes de la même hauteur ? En tirant cinq cartes successivement avec remise, de combien de façons peut-on tirer un full ?

Solution de l'exercice 7.. Avec 32 cartes, on peut former $C_4^2 = 6$ paires de chaque hauteur, et donc 48 en tout. De même on peut former $8 \times C_4^3 = 32$ brelans. Pour les fulls, on a 8 manières de choisir la hauteur de la paire, puis 7 de choisir celle du brelan, 6 de choisir les couleurs de la paire et 4 celles du brelan, soit $8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$ possibilités.

Pour les tirages successifs (cette fois l'ordre compte) de 3 cartes avec remise, on a 32 possibilités pour la première carte, puis 4 pour chacune des suivantes, soit $32 \times 4 \times 4 = 512$

possibilités. Le tirage d'un full (ordonné) avec remise est la donnée de : la hauteur du brelan (8 possibilités), la hauteur de la paire (7 possibilités restantes), les couleurs (4^3 possibilités pour le brelan ordonné et 4^2 pour la paire ordonnée), et enfin de comment sont imbriquées les cartes du brelan et la tierce, autrement des places occupées par les cartes de la paire parmi les 5, il y a donc $C_5^2 = 10$ choix possibles. Finalement, on obtient $8 \times 7 \times 4^5 \times 10 = 573440$ tirages d'un full ordonné avec remise.

8. Jusqu'en 2008, un tirage du loto était un ensemble de six nombres entiers distincts compris entre 1 et 49. Combien y avait-il de tirages possibles ? Pour tout entier n compris entre 0 et 6, déterminer le nombre de ces tirages ayant exactement n numéros communs avec un tirage donné. Combien y avait-il de tirages ne contenant pas deux nombres consécutifs ?

Depuis 2008, un tirage est une paire formée d'un ensemble de cinq entiers distincts compris entre 1 et 49 et d'un entier compris entre 1 et 10. Y a-t-il plus ou moins de tirages possibles qu'avant 2008 ? Combien y a-t-il de tirages formés de six nombres distincts ?

Solution de l'exercice 8.. Avant 2008, il y avait $C_{49}^6 = 13983816$ tirages possibles.

Étant donné un tirage, choisir un autre tirage ayant exactement n numéros en commun avec le premier revient à choisir les n numéros du premier tirage à conserver (il y a C_6^n manières de le faire), puis les $6-n$ autres numéros, parmi les $49-6-(6-n)$ numéros restants (C_{37+n}^{6-n} choix possibles). Soit $C_6^n C_{37+n}^{6-n}$ tirages ayant exactement n numéros en commun avec tirage donné.

Pour dénombrer les tirages sans numéros consécutifs, remarquons, qu'un tirage équivaut à une décomposition de 43 comme somme de 7 entiers supérieurs ou égaux à 1 (donnant le nombre de numéros non choisis avant la première boule, puis entre la première et la deuxième boule, ..., entre les deux dernières boules et après la dernière). En retranchant 1 à chacun de ses entiers, on obtient une décomposition de 36 comme somme des 7 entiers positifs ou nuls. Il reste à dénombrer ces décompositions. Cela revient, d'après la correspondance que nous venons d'utiliser entre tirages de 6 boules et décompositions d'entier comme somme de 7 entiers, à compter le nombre de manières de choisir 6 boules parmi 42. Il y en a donc C_{42}^6.

Actuellement, il y en a $C_{49}^5 \times 10 = C_{49}^6 \frac{6 \times 10}{44} = 19068840 > C_{49}^6$, il y a donc davantage de tirages possibles. Pour éviter d'avoir 2 nombres identiques, il faut déterminer en premier l'entier entre 1 et 10 puis le retirer de la liste des 49 numéros. On obtient donc $C_{48}^5 \times 10 = 17123040$ tels tirages.

9. De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ?

De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Solution de l'exercice 9. Il y a p choix indépendants pour chaque boule, soit p^n manières de placer n boules numérotées dans p urnes.

Si les boules sont identiques, chaque manière de les disposer dans les p urnes revient à décomposer n comme somme de p entier naturels (un autre problème classique). Cela revient encore à aligner $n+p-1$ boules, puis à en replacer $p-1$ par des séparateurs entre les contenus des urnes. Il y a donc $C_{n+p-1}^{p-1} = C_{n+p-1}^{n}$ manières de le faire.

10. On lance n dés indistinguables. Combien y a-t-il de lancers distincts possibles ? De combien de façons peut-on obtenir n chiffres distincts ? Reprendre ces questions en supposant les dés peints de n couleurs distinctes.

Solution de l'exercice 10. Lorsque les dés sont indistinguables, un lancer équivaut à placer chaque dé dans une urne correspondant à la valeur qu'il affiche. Lancer n dés revient donc à placer n boules dans 6 urnes. Par l'exercice précédent, on sait qu'il y a C_{n+5}^{n} possibilités.

Pour obtenir n chiffres distincts, on a autant de possibilités que de choix de ces n chiffres parmi 6, soit C_6^n.

Supposons maintenant les dés de couleurs différentes. Il y a 6 possibilités pour chaque dé, soit 6^n tirages possibles.

Si on veut que les valeurs soient différentes, il faut que $n \leq 6$ et on a alors 6 possibilités pour le premier dé, 5 pour le second ...et $6-n+1$ pour le dernier. Soit $n!C_6^n$ possibilités. Une autre manière de compter est de considérer que cela revient à choisir les valeurs (C_6^n possibilités) puis des les attribuer aux dés ($n!$ possibilités). On pourra également raisonner à partir du nombre d'injections d'un ensemble à 6 élements dans un ensemble à n éléments.

11. Une urne contient N boules, chacune peinte avec une couleur choisie parmi p. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$ on note N_i le nombre de boules de couleur i. Ainsi, $N = N_1 + \ldots + N_p$. On se donne un entier n et des entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que $n = n_1 + \ldots + n_p$.

De combien de façons peut-on tirer sans remise n boules de cette urne de telle sorte qu'on ait n_i boules de couleur i pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$? Qu'en est-il si l'on tire maintenant avec remise ?

Solution de l'exercice 11. Un tirage (sans tenir compte de l'ordre) sans remise des n boules avec les contraintes de couleurs de l'énoncé équivaut au choix, pour chacune des couleurs $i \in \{1, \ldots, p\}$, de n_i boules parmi N_i. Soit $C_{N_i}^{n_i}$ possibilités pour chaque couleur, qu'il faut ensuite multiplier pour obtenir le nombre total de combinaisons. Ensuite chacune de ces collections de boules peut être obtenue de $n!$ manières différentes si on tient compte de l'ordre du tirage. On obtient donc $n!C_{N_1}^{n_1} \ldots C_{N_p}^{n_p}$ façons de tirer sans remise les n boules de manière à avoir n_i boules de couleur i pour chaque i.

Pour traiter le problème avec remise, on remarque que se donner un tirage ordonné des n boules comme dans l'énoncé revient à se donner, d'une part, les tirages ordonnés des n_i boules de chaque couleur et, d'autre part, la liste ordonnée des couleurs des boules (couleur de la première boule, de la seconde, ..., de la $n^{\text{ième}}$). Pour chaque i, les n_i boules de couleur i peuvent être tirées de $N_i^{n_i}$ manières (parmi N_i, avec remise, en tenant compte de l'ordre). La question de la liste ordonnée des couleurs des boules revient à dénombrer des anagrammes (avec p lettres distinctes, on cherche à dénombrer le nombre de mots contenant exactement n_i fois la $i^{\text{ième}}$ lettre, pour $i = 1, \ldots, p$). C'est un problème classique, qui est aussi équivalent à trouver le coefficient de $X_1^{n_1} \ldots X_p^{n^p}$ dans le développement du polynome à p variables $(X_1 + \cdots + X_p)^n$. Le nombre de combinaisons est donné par la formule du multinôme (elle généralise celle du binôme, qu'on retrouve pour $p = 2$) :

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_p!}.$$

Finalement, on trouve pour le nombres de manières de tirer n boules ordonnées, dont n_i de couleur i, pour $i = 1, \ldots, p$ avec remise :

$$\frac{n! N_1^{n_1} \ldots N_p^{n_p}}{n_1! \ldots n_p!}.$$

On peut aussi voir ce nombre comme le coefficient de $X_1^{n_1} \ldots X_p^{n^p}$ dans le développement de $(N_1 X_1 + \cdots + N_p X_p)^n$.

Solution de l'exercice 11. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ est non dénombrable (voir poly du cours), et s'injecte (via $x \mapsto (x, 0)$) dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, qui est donc lui aussi non dénombrable.

Pour tout entier n, l'ensemble des suites finies de 0 et de 1 de longueur n est dénombrable (et même fini puis qu'il y en a simplement 2^n). En faisant la réunion sur $n \in \mathbb{N}$ qui est dénombrable, on obtient l'ensemble des suites finies (de longueur quelconque) qui est donc encore un ensemble dénombrable. Le même argument s'applique si on remplace l'ensemble des valeurs $\{0, 1\}$ par un autre ensemble dénombrable, puisqu'un produit fini d'ensembles dénombrables et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables sont encore dénombrables. Ainsi l'ensemble des suites finies d'entiers naturels est dénombrable, de même que l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients rationnels (en bijection avec les suites finies de rationnels qui sont simplement les coefficients des polynômes).

En revanche, l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 est non dénombrable. En effet il s'agit de l'ensemble des indicatrices des parties de $\mathbb{N}$, qui est en bijection (voir exercice 3) avec l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, qui est, on le sait, non dénombrable. Cantor a en effet démontré très simplement qu'un ensemble (ici $\mathbb{N}$) ne pouvait jamais être en bijection avec l'ensemble de ses parties. C'est comme cela qu'on montre que $\mathbb{R}$ est non dénombrable, en prouvant qu'il est en bijection avec l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$).