# Espaces de probabilités.

**1.** Donner un exemple d'une famille de parties d'un ensemble qui ne soit pas une tribu.

**2.** Soient $a, b$ des réels tels que $a < b$. Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont boréliens : $[a, b]$, $]a, b]$, $]-\infty, a]$, $\{a\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

**3.** Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1. Pour tout $i \geq 1$ et tout $\varepsilon \in \{0,1\}$, on note

$$c_{i,\varepsilon} = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega : \omega_i = \varepsilon\}.$$

On note $\mathscr{F}$ la tribu sur $\Omega$ engendrée par l'ensemble des parties $C_{i,\varepsilon}$. Montrer que les parties suivantes de $\Omega$ appartiennent à $\mathscr{F}$ :

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{suites qui contiennent une infinité de } 1\},\\
B &= \{\text{suites qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs}\},\\
C_{a,b,N} &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : a \leq \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \leq b\right\}, \text{avec } N \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b,\\
D_p &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = p\right\}, \text{avec } p \in [0,1],\\
E &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : \text{ la limite } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \text{ existe}\right\}.
\end{aligned}$$

On prendra garde au fait que l'égalité $E = \bigcup_{p\in[0,1]} D_p$ ne permet pas de déduire que $E$ est un événement du fait que les $D_p$ le sont, car il s'agit d'une réunion non dénombrable.

**4.** On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

**5.** On considère un jeu de pile ou face infini. Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer la probabilité que le premier temps auquel on obtient pile soit le temps $n$.

Soit $k \geq 1$ un entier. Calculer la probabilité que le $k$-ième temps auquel on obtient pile soit le temps $n$.

**6.** *Le but de ce problème est de démontrer qu'une mesure de probabilités borélienne sur* $\mathbb{R}$ *est déterminée par sa fonction de répartition. Pour ce faire, on démontre un résultat technique important appelé lemme de classe monotone.*

Soit $\Omega$ un ensemble. On dit qu'une partie $\mathscr{L}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est un $\lambda$-*système* si $\Omega \in \mathscr{L}$, si pour tous $A, B \in \mathscr{L}$ tels que $A \subset B$ on a $B \setminus A \in \mathscr{L}$ et si enfin pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{L}$, la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ appartient à $\mathscr{L}$.

a) Montrer que pour toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$, il existe un unique $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$ et qui est minimal pour l'inclusion parmi les $\lambda$-systèmes qui contiennent $\mathscr{S}$. On l'appelle le $\lambda$-système *engendré par* $\mathscr{S}$.

Soit $\mathscr{I}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{I}$ est un $\pi$-*système* si pour tout $n \geq 1$ et tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{I}$, on a $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{I}$.

b) Montrer qu'une tribu est à la fois un $\lambda$-système et un $\pi$-système.

c) Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui est à la fois un $\lambda$-système et un $\pi$-système. Montrer que $\mathscr{F}$ est stable par unions finies, c'est-à-dire que pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, on a $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu.

Soit $\mathscr{S}$ un $\pi$-système. Soit $\mathscr{L}$ le $\lambda$-système engendré par $\mathscr{S}$.

d) Montrer que $\mathscr{L}$ est inclus dans la tribu engendrée par $\mathscr{S}$.

On va démontrer que $\mathscr{L}$ lui-même est une tribu. Pour cela, on montre qu'il est stable par intersections finies.

e) Soit $A \in \mathscr{S}$. On pose

$$\mathscr{L}_1 = \{B \in \mathscr{L} : A \cap B \in \mathscr{L}\}.$$

Montrer que $\mathscr{L}_1$ est un $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$. En déduire que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$.

f) Soit maintenant $A \in \mathscr{L}$. On pose

$$\mathscr{L}_2 = \{B \in \mathscr{L} : A \cap B \in \mathscr{L}\}.$$

Montrer que $\mathscr{L}_2$ est un $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$. En déduire que $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}$.

g) Conclure de ce qui précède que si $\mathscr{S}$ est un $\pi$-système, alors le $\lambda$-système engendré par $\mathscr{S}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathscr{S}$. *Ce résultat s'appelle le lemme de classe monotone.*

h) Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $\mathscr{S}$ un $\pi$-système inclus dans $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{S})$. Montrer que si $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ pour tout $A \in \mathscr{S}$, alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$. On pourra considérer

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{F} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}.$$

i) Montrer que l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$ est un $\pi$-système sur $\mathbb{R}$. En déduire que si deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ ont la même fonction de répartition, alors elles sont égales.