Université Pierre et Marie Curie 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 Feuille 2

# Espaces de probabilités.

**1.** Donner un exemple d'une famille de parties d'un ensemble qui ne soit pas une tribu.

*Solution de l'exercice* 1. La définition d'une tribu impose d'importantes contraintes, de sorte qu'il est très facile de produire des familles de parties d'un ensemble $E$ (non vide) qui ne sont pas des tribus. Par exemple, $\emptyset$ (car ne contient aucun élément et en particulier pas l'ensemble vide), $\{E\}$ et $\{\emptyset\}$ (pas stable par complémentaire) ne sont pas des tribus. On peut aussi faire en sorte que ce soit la stabilité par union/intesection qui soit en défaut, en prenant par exemple $E = \{1, 2, 3, 4\}$, et en considérant $\{\emptyset, E, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\}$ (qui n'est pas une tribu car $\{1, 2\} \cup \{2, 3\}$ n'est pas dedans). On peut même avoir la stabilité par complémentaire, par union ou intersection finie, mais pas par union ou intersection dénombrable : il suffit de considérer $E$ infini (par exemple $E = \mathbb{N}$) et l'ensemble de ses parties qui sont finies ou dont le complémentaire est fini (en revanche, si on remplace "fini" par "dénombrable, on obtient une tribu).

**2.** Soient $a, b$ des réels tels que $a < b$. Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont boréliens : $[a, b]$, $]a, b]$, $] - \infty, a]$, $\{a\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

*Solution de l'exercice* 2. $[a, b]$, $] - \infty, a]$, $\{a\}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés, ce sont des complémentaires d'ouverts. Les ouverts étant boréliens, et les boréliens étant stables par passage au complémentaires, les fermés sont manifestement des boréliens.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable, et peut donc s'écrire comme la réunion dénombrable de ses singletons qui sont boréliens, c'est donc aussi un borélien.

Enfin $]a, b] = [a, b] \cap ]a, +\infty[$ est l'intersection de deux boréliens (pour le premier, on vient de le voir, et le second est borélien puisqu'ouvert), donc borélien.

**3.** Soit $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1. Pour tout $i \geq 1$ et tout $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on note

$$c_{i,\varepsilon} = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega : \omega_i = \varepsilon\}.$$

On note $\mathscr{F}$ la tribu sur $\Omega$ engendrée par l'ensemble des parties $C_{i,\varepsilon}$. Montrer que les parties suivantes de $\Omega$ appartiennent à $\mathscr{F}$ :

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{suites qui contiennent une infinité de } 1\},\\
B &= \{\text{suites qui ne contiennent pas deux } 1 \text{ consécutifs}\},\\
C_{a,b,N} &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : a \leq \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \leq b\right\}, \text{avec } N \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b,\\
D_p &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = p\right\}, \text{avec } p \in [0,1],\\
E &= \left\{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} : \text{ la limite } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \text{ existe}\right\}.
\end{aligned}$$

On prendra garde au fait que l'égalité $E = \bigcup_{p\in[0,1]} D_p$ ne permet pas de déduire que $E$ est un événement du fait que les $D_p$ le sont, car il s'agit d'une réunion non dénombrable.

*Solution de l'exercice* 3. On peut écrire :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq n} c_{i,1}.$$

Chaque $c_{i,1}$ est dans $\mathscr{F}$ par hypothèse, et donc les réunions dénombrables d'éléments de $\mathscr{F}$ $\bigcup_{i\geq n} c_{i,1}$ le sont aussi, ainsi que leur intersection sur $n \in \mathbb{N}$.

On raisonne de même pour les autres ensembles, pour cela il suffit de les construire à partir d'éléments de $\mathscr{F}$ comme les $c_{i,\varepsilon}$ en effectuant des passages au complémentaire, des réunions et intersections dénombrables :

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (c_{i,1} \cap c_{i+1,1})^c.$$

$$C_{a,b,N} = \bigcup_{\substack{I\subset\{0,\ldots,N-1\}\\ a\leq \#I\leq b}} \bigcap_{i\in I} c_{i,1} \bigcap_{j\in\{1,\ldots,N-1\}\setminus I} c_{j,0}.$$

Dans l'écriture ci-dessus, chaque $I$ est fini et $I$ décrit un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\{0,\ldots,N-1\})$ qui est fini, donc les intersections et la réunion portent bien sur des ensembles dénombrables (et même finis).

Cet équation justifie donc que les $C_{a,b,N}$ sont dans la tribu $\mathscr{F}$, résultat que l'on va utiliser pour traiter les ensembles suivants :

$$D_p = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{i\geq n} C_{i(p-\frac{1}{k}),i(p+\frac{1}{k}),i}.$$

Pour $E$, on utilise le fait qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy, et on prend garde à exprimer cette propriété en ne quantifiant que sur des ensembles dénombrables :

$$E = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_{a\in\mathbb{Q}} \bigcap_{i\geq n} C_{i(a-\frac{1}{k}),i(a+\frac{1}{k}),i}.$$

**4.** On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

*Solution de l'exercice* 4. Il y a $C_4^2 = 6$ paires de chaque hauteur, donc $6 \times 8 = 48$ en tout.

Si on change une seule carte, on obtient une paire lorsqu'on tire une des 3 cartes de la même hauteur que celle qu'on a gardée en main. On a donc une probabilité $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ d'obtenir une paire.

Si on change les deux cartes, il y a $30 \times 29$ tirages ordonnés possibles de 2 nouvelles cartes. Parmi eux, on a deux manières d'obtenir une paire : Considérons d'abord le cas où la première carte est l'une des 6 cartes de la même hauteur que l'une des deux cartes que l'on a jetées, alors il reste seulement 2 cartes parmi les 29 restantes permettant de compléter la paire. Dans l'autre cas, où la première carte est l'une des 24 autres cartes, il y a 3 secondes cartes possibles donnant une paire. Au final, on obtient $6 \times 2 + 24 \times 3 = 80$ tirages ordonnés donnant une paire. Soit une probabilité de $\frac{80}{30 \times 29} = \frac{8}{87} < \frac{1}{10}$.

C'est donc la première stratégie qui donne la plus grandes possibilité d'obtenir une paire.

**5.** On considère un jeu de pile ou face infini. Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer la probabilité que le premier temps auquel on obtient pile soit le temps $n$.

Soit $k \geq 1$ un entier. Calculer la probabilité que le $k$-ième temps auquel on obtient pile soit le temps $n$.

*Solution de l'exercice* 5. On note $p$ la probabilité d'obtenir un pile. Celle d'obtenir un face est donc $1 - p$. L'énoncé laisse entendre que le jeu est non biaisé et que $p = 1/2$ mais les calculs sont plus clairs en gardant la notation $p$.

La probabilité que le premier pile soit obtenu au temps $n$ (et donc qu'on a donc obtenu face lors des $n - 1$ premiers tirages) est $(1 - p)^{n-1}p$.

Soit $k \geq 1$. Dire que le $k$-ième temps auquel on obtient pile est le temps $n$, revient a dire qu'on a obtenu exactement $k-1$ pile sur les $n-1$ premiers tirages, puis un pile encore au $n$-ième. Il y a $C_{n-1}^{k-1}$ manières d'obtenir cela (chacune revient à choisir les positions des $k - 1$ premiers pile parmi les $n - 1$ premiers lancers). Chacun de ces tirages a la même probabilité $(1 - p)^{n-k}p^k$. De plus ces événements sont disjoints, donc la probabilité totale (que le $k$-ième temps auquel on obtient pile soit le temps $n$) est $C_{n-1}^{k-1}(1 - p)^{n-k}p^k$.

**6.** *Le but de ce problème est de démontrer qu'une mesure de probabilités borélienne sur $\mathbb{R}$ est déterminée par sa fonction de répartition. Pour ce faire, on démontre un résultat technique important appelé lemme de classe monotone.*

Soit $\Omega$ un ensemble. On dit qu'une partie $\mathscr{L}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est un $\lambda$-*système* si $\Omega \in \mathscr{L}$, si pour tous $A, B \in \mathscr{L}$ tels que $A \subset B$ on a $B \setminus A \in \mathscr{L}$ et si enfin pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{L}$, la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ appartient à $\mathscr{L}$.

a) Montrer que pour toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$, il existe un unique $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$ et qui est minimal pour l'inclusion parmi les $\lambda$-systèmes qui contiennent $\mathscr{S}$. On l'appelle le $\lambda$-système *engendré par* $\mathscr{S}$.

Soit $\mathscr{I}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{I}$ est un $\pi$-*système* si pour tout $n \geq 1$ et tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{I}$, on a $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{I}$.

b) Montrer qu'une tribu est à la fois un $\lambda$-système et un $\pi$-système.

c) Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui est à la fois un $\lambda$-système et un $\pi$-système. Montrer que $\mathscr{F}$ est stable par unions finies, c'est-à-dire que pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, on a $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu.

Soit $\mathscr{S}$ un $\pi$-système. Soit $\mathscr{L}$ le $\lambda$-système engendré par $\mathscr{S}$.

d) Montrer que $\mathscr{L}$ est inclus dans la tribu engendrée par $\mathscr{S}$.

On va démontrer que $\mathscr{L}$ lui-même est une tribu. Pour cela, on montre qu'il est stable par intersections finies.

e) Soit $A \in \mathscr{S}$. On pose

$$\mathscr{L}_1 = \{B \in \mathscr{L} : A \cap B \in \mathscr{L}\}.$$

Montrer que $\mathscr{L}_1$ est un $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$. En déduire que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$.

f) Soit maintenant $A \in \mathscr{L}$. On pose

$$\mathscr{L}_2 = \{B \in \mathscr{L} : A \cap B \in \mathscr{L}\}.$$

Montrer que $\mathscr{L}_2$ est un $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$. En déduire que $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}$.

g) Conclure de ce qui précède que si $\mathscr{S}$ est un $\pi$-système, alors le $\lambda$-système engendré par $\mathscr{S}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathscr{S}$. *Ce résultat s'appelle le lemme de classe monotone.*

h) Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $\mathscr{S}$ un $\pi$-système inclus dans $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{S})$. Montrer que si $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ pour tout $A \in \mathscr{S}$, alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$. On pourra considérer

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{F} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}.$$

i) Montrer que l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$ est un $\pi$-système sur $\mathbb{R}$. En déduire que si deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ ont la même fonction de répartition, alors elles sont égales.

*Solution de l'exercice* 6.

a) On remarque que l'intersection quelconque d'une famille de $\lambda$-systèmes contenant un ensemble de parties données est encore un $\lambda$-système. C'est un phénomène général pour les objets définis par des propriétés de stabilité (comme les sous-groupes, les sous-espaces vectoriels).
Pour obtenir le $\lambda$-système contenant $\mathscr{S}$ minimal pour l'inclusion, il suffit de considérer l'intersection (qui a un sens car il existe toujours au moins un $\lambda$-système contenant $\mathscr{S}$ :$\mathbb{P}(\Omega)$) des $\lambda$-systèmes contenant $\mathscr{S}$. C'est encore un $\lambda$-système contenant $\mathscr{S}$, et il est inclus dans tous les autres ayant cette propriété par construction.

b) Le fait qu'une tribu est à la fois un $\lambda$-système découle immédiatement des définitions de ces objets (la condition qu'une tribu contient $\emptyset$ équivaut au fait qu'elle contient l'ensemble total, ou encore qu'elle est non vide à cause de la stabilité par complémentaire ; on peut aussi vérifier facilement qu'un $\lambda$-système contient toujours $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$).
On sait aussi qu'une tribu est stable par intersection dénombrable (et donc par intersection finie), cela découle de la stabilité par réunion et par passage au complémentaire. Une tribu est donc aussi un $\pi$-système.

c) Il suffit de traiter le cas $n = 2$. La stabilité par réunion finie découle de la stabilité par intersection finie (du $\pi$-système) et par passage au complémentaire (du $\lambda$-système) via le calcul suivant : Si $A_1$ et $A_2$ sont dans $\mathscr{F}$, alors $A_1 \cup A_2 = (A_1^c \cap A_2^c)^c$ aussi.
Soit maintenant $A_n$ une suite de parties de $\mathscr{F}$. En raisonnement par récurrence, on déduit de l'argument précédent que pour tout $n \geq 2$, $B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{F}$. Comme $\mathscr{F}$ est un $\lambda$-système, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$, qui s'écrit aussi comme la réunion croissante des $B_n$ est aussi dans $\mathscr{F}$. Comme on sait déjà que $\mathscr{F}$ est non vide et est stable par passage au complémentaire, cela prouve qu'il s'agit d'une tribu.

d) La tribu engendrée par $\mathscr{S}$ est en particulier un $\lambda$-système qui contient $\mathscr{S}$. D'après le a), $\mathscr{L}$ aussi et de plus cet ensemble est minimal parmi ceux ayant cette propriété et est donc inclus dans la tribu engendrée par $\mathscr{S}$.

e) On vérifie chaque axiome. Tout d'abord, on a bien $\Omega \in \mathscr{L}_1$ puisque si $A \in \mathscr{S}$, alors $A \cap \Omega = A \in \mathscr{S} \subset \mathscr{L}$.
Soient maintenant $B_1$ et $B_2$ dans $\mathscr{L}_1$ tels que $B_2 \subset B_1$. Par définition de $\mathscr{L}_1$, cela entraine que $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ sont dans $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{L}$ est un $\lambda$-système, on en déduit que

$$A \cap (B_1 \setminus B_2) = (A \cap B_1) \setminus (A \cap B_2) \in \mathscr{L}.$$

Autrement dit $B_1 \setminus B_2 \in \mathscr{L}_1$.
Soit maintenant $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{L}_1$. Chaque $A \cap B_n$ est dans $\mathscr{L}$, et leur réunion croissante aussi :

$$A \cap (\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \bigcup_{n\geq 1} (A \cap B_n) \in \mathscr{L}.$$

Cela montre que $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{L}_1$.
Ainsi $\mathscr{L}_1$ est un $\lambda$-système. Comme $A \in \mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ est un $\pi$-système, on vérifie facilement que $\mathscr{L}_1$ contient $\mathscr{S}$. Or $\mathscr{L}$ est minimal parmi les $\lambda$-systèmes contenant $\mathscr{S}$. Donc $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_1$. Or par contruction de $\mathscr{L}_1$, on a $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}$. Donc $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$.

f) Soit maintenant $A \in \mathscr{L}$. Le raisonnement est quasi-identique à celui de la question précédente.
Tout d'abord, on a bien $\Omega \in \mathscr{L}_2$ puisque si $A \in \mathscr{L}$, alors $A \cap \Omega = A \in \mathscr{L}$.
Soient maintenant $B_1$ et $B_2$ dans $\mathscr{L}_2$ tels que $B_2 \subset B_1$. Par définition de $\mathscr{L}_2$, cela entraine que $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ sont dans $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{L}$ est un $\lambda$-système, on en déduit que

$$A \cap (B_1 \setminus B_2) = (A \cap B_1) \setminus (A \cap B_2) \in \mathscr{L}.$$

Autrement dit $B_1 \setminus B_2 \in \mathscr{L}_2$.
Soit maintenant $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{L}_2$. Chaque $A \cap B_n$ est dans $\mathscr{L}$, et leur réunion croissante aussi :

$$A \cap (\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \bigcup_{n\geq 1} (A \cap B_n) \in \mathscr{L}.$$

Cela montre que $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{L}_2$.
Ainsi $\mathscr{L}_2$ est un $\lambda$-système. Dire qu'il contient $\mathscr{S}$ revient à dire que si $B \in \mathscr{S}$, alors $A \cap B\mathscr{L}$. Or c'est exactement ce que l'on a démontré à la question précédente (en échangeant les lettres $A$ et $B$). Donc $\mathscr{L}_2$ est un $\lambda$-système contenant $\mathscr{S}$. Par minimalité de $\mathscr{L}$ parmi de tels objets, on en déduit que $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_2$. L'autre inclusion découlant de la définition de $\mathscr{L}_2$, on a $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}$.

g) On a démontré à la question précédente que $\mathscr{L}$ est un $\pi$-système. C'est aussi, par construction, un $\lambda$-système. D'après le c), c'est donc une tribu. De plus $\mathscr{L}$ contient $\mathscr{S}$. $\mathscr{L}$ contient donc la $\sigma(\mathscr{S})$ (puisque, par définition, celle-ci est minimale parmis les tribus contenant $\mathscr{S}$).
L'autre inclusion a été démontrée au d). Ces deux tribus sont donc égales.

h) On commence par vérifier que $\mathscr{E}$ soit un $\lambda$-système. Tout d'abord, $\mathbb{P}_1(\Omega) = 1 = \mathbb{P}_2(\Omega)$. Ensuite, si $A_1, A_2 \in \mathscr{E}$ sont tels que $A_1 \subset A_2$, alors, comme $A_2$ et $A_2 \setminus A_1$ sont des éléments disjoints de $\mathscr{F}$, et par additivité de chacune des probabilités, on a $\mathbb{P}_1(A_1) + \mathbb{P}_1(A_2 \setminus A_1) = \mathbb{P}_1(A_2)$ et $\mathbb{P}_2(A_1) + \mathbb{P}_2(A_2 \setminus A_1) = \mathbb{P}_2(A_2)$. Or, $A_1, A_2 \in \mathscr{E}$ signifie que $\mathbb{P}_1(A_1) = \mathbb{P}_2(A_1)$ et $\mathbb{P}_1(A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$. En combinant ces 4 égalités, on obtient $\mathbb{P}_1(A_2 \setminus A_1) = \mathbb{P}_2(A_2 \setminus A_1)$. Autrement dit $A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{E}$. Pour la stabilité par réunion croissante, elle découle de la propriété suivante de continuité des probabilités (Proposition 2.1.3 a) du poly) : si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{F}$, alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(A_n) = \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right).$$

En effet, les deux suites (pour $i = 1$ et $i = 2$) sont égales, et donc leurs limites aussi, ce qu'on voulait justement démontrer.
$\mathscr{E}$ est donc un $\lambda$-système contenant $\mathscr{S}$. Il contient donc[1] le $\lambda$-système engendré par $\mathscr{S}$,

1. le "sous-objet engendré par une partie" est toujours croissant en la partie, qu'il s'agisse de groupes, espaces vectoriels, tribus ou $\lambda$-systèmes, et l'argument est le même : l'objet engendré par la plus grosse partie contient la plus petite, mais l'objet engendré par la plus petite partie est minimal parmi les objets ayant cette propriété, et est donc inclus dans le précédent

qui n'est autre que $\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{F}$, d'après le g), puisque $\mathscr{S}$ est un $\pi$-système. Les deux mesures sont donc égales sur $\mathscr{E} = \mathscr{F}$.

i) Les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$ forment un $\pi$-système sur $\mathbb{R}$, puisque l'intersection d'un nombre fini d'entre eux est égale au plus petit.
Si deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ ont la même fonction de répartition, cela signifie qu'elles sont égales sur ce $\pi$-système. Le résultat de la question précédente permet de conclure qu'elles sont égales sur la tribu engendrée par ce $\pi$-système, qu'on sait être la tribu borélienne.