

Variables aléatoires.

1. On lance un dé tétraédral dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé octaédral dont les faces sont numérotées de 1 à 8. Calculer la loi de la somme S , du produit P et du plus grand M des deux nombres obtenus.

2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $-\log U$.

3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ . Soit $c > 0$ un réel. Déterminer la loi de cX .

4. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

5. *On étudie des variables aléatoires qui ont une propriété d'absence de mémoire.*

a) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que pour tous $n, m \geq 0$ entiers, on a

$$\mathbb{P}(T \geq n + m) = \mathbb{P}(T \geq n)\mathbb{P}(T \geq m).$$

Que peut-on dire de la loi de T ?

b) Soit S une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que pour tous $a, b \geq 0$ réels, on a

$$\mathbb{P}(S > a + b) = \mathbb{P}(S > a)\mathbb{P}(S > b).$$

Que peut-on dire de la loi de S ?

6. Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire *Hamlet*, c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?

On rappelle que la mesure de Lebesgue, notée Leb , est l'unique mesure borélienne sur \mathbb{R} qui, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, associe à l'intervalle ouvert $]a, b[$ la mesure $b - a$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x .

7. On considère l'espace de probabilités $([0, 1[, \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb})$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une variable X_n à valeurs réelles en posant

$$\forall x \in [0, 1[, X_n(x) = \lfloor 2\{2^{n-1}x\} \rfloor.$$

- a) Représenter le graphe de X_1, X_2, X_3 vues comme fonctions de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} .
- b) Déterminer la loi de X_n pour tout $n \geq 1$.
- c) Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$. On pose $a = \sum_{k=1}^n 2^{-k}\varepsilon_k$ et $b = a + 2^{-n}$. Montrer que

$$\{x \in [0, 1[: X_1(x) = \varepsilon_1, \dots, X_n(x) = \varepsilon_n\} = [a, b[.$$

En déduire la loi de la variable aléatoire (X_1, \dots, X_n) à valeurs dans $\{0, 1\}^n$.

La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définie sur l'espace de probabilités $([0, 1[, \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb})$, constitue donc un jeu de pile ou face infini.

- d) Montrer que la plus petite tribu sur $[0, 1]$ qui contienne tous les ensembles $\{x \in [0, 1[: X_n(x) = \varepsilon\}$ pour $n \geq 1$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$ est la tribu borélienne.