Université Pierre et Marie Curie — 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 4

Variables aléatoires : loi et espérance.

1. Dans une population de n oiseaux, on en capture m que l'on bague puis que l'on relâche. Un peu plus tard, on en capture à nouveau m.

a) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Quelle est la probabilité que parmi les m oiseaux capturés, k soient bagués ?

b) Pour quelle valeur de k la probabilité calculée ci-dessus est-elle maximale ?

2. Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$ deux réels. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $p_{i,j} = \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j$.

a) Montrer qu'en posant $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = p_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit une mesure de probabilités sur $\mathbb{N}^2$.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $X((i,j)) = i$ et $Y((i,j)) = j$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et on suppose $p_n > 0$. Soit $\lambda > 0$ un réel. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{n}$.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'on a l'égalité

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

5. Soient $X, Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer de deux façons différentes que

$$\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(X = n) + \sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(X + Y = n).$$

6. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout réel $s \in [0,1]$, la fonction s^X est une variable aléatoire intégrable. *On rappelle que par convention,* $0^0 = 1$.

On appelle *fonction génératrice* de X la fonction

$$\begin{aligned} G_X : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \mathbb{E}[s^X]. \end{aligned}$$

b) Montrer que G_X est une fonction positive croissante. Calculer ses valeurs en 0 et en 1.

c) Calculer la fonction G_X lorsque X suit l'une des lois suivantes :

(i) Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$,

(ii) binomiale de paramètres $n \geq 0$ et $p \in [0,1]$,

(iii) géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,

(iv) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

d) Que peut-on dire de deux variables aléatoires à valeurs entières qui ont la même fonction génératrice ?

7. Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Soit $a > 0$ un nombre réel.

a) Montrer que $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

b) Que peut-on dire de la proportion de la population qui gagne plus de dix fois le salaire moyen ?

L'inégalité démontrée au a) s'appelle l'*inégalité de Markov.*

8. Soit Ω un ensemble. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe une unique paire de fonctions (g,h) de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f = g - h$ et qu'on ait à la fois $g \leq |f|$ et $h \leq |f|$. Montrer que si $(\tilde{g}, \tilde{h})$ est une autre paire de fonctions positives telles que $f = \tilde{g} - \tilde{h}$, alors on a $g \leq \tilde{g}$ et $h \leq \tilde{h}$.

9. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur *pile* avec probabilité p et sur *face* avec probabilité $1-p$.

a) Décrire le modèle probabiliste utilisé pour modéliser cette situation.

b) On appelle T_1 le numéro du premier lancer où l'on obtient *pile*. Déterminer la loi de T_1.

c) Pour tout $i \geq 1$, on appelle T_i le numéro du lancer où l'on obtient *pile* pour la i-ième fois. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \geq 1$.