Université Pierre et Marie Curie | 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 | Feuille 5

# Variables aléatoires : loi et espérance (suite).

**1.** Soit $X$ une variable aléatoire. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la variable $e^{\lambda X}$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ dans chacun des cas suivants :
a. $X$ suit la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$,
b. $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$,
c. $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

**2.** a. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $X^2$ est intégrable, alors $X$ est intégrable. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que la loi de $X$ admet une densité ?
b. Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $X^k$ soit intégrable pour tout $k$ compris entre 1 et $m$ et $\mathbb{E}[X^{m+1}] = +\infty$.

**3.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que $f$ est la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$.
Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi admet la densité $f$.
b) La variable aléatoire $X$ est-elle intégrable ?
c) Calculer la fonction de répartition de $X$.
d) Calculer la loi de $Y = \arctan(X)$.

*La loi considérée dans cet exercice s'appelle la loi de Cauchy standard.*

**4.** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $X^n$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X^n]$. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[X^n]$ est le nombre de manières d'apparier $n$ points, c'est-à-dire le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ par des paires.

**5.** Soit $\theta > 0$ un réel. Soit $X$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\theta$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $X^n$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X^n]$. Donner une interprétation combinatoire de ce nombre lorsque $\theta = 1$.

**6.** Soit $\lambda > 0$ un réel. Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire $X(X-1)\ldots(X-k+1)$ est intégrable et calculer son espérance. Calculer $\mathbb{E}[X^m]$ pour $m = \{1, 2, 3, 4\}$ lorsque $\lambda = 1$ et vérifier que pour chacune de ces valeurs de $m$, $\mathbb{E}[X^m]$ est le nombre de partitions d'un ensemble à $m$ éléments. *On peut démontrer que cette assertion est vraie pour tout* $m \geq 1$.

**7.** Montrer qu'une variable aléatoire positive dont l'espérance est nulle est nulle presque sûrement. On pourra montrer, par contraposition, que si $X$ est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{E}[X] > 0$.

**8.** Soient $\lambda, \mu > 0$ deux réels. On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^2$, la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ et, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$, la probabilité $\mathbb{P}$ caractérisée par

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\{(n,m)\}) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\mu^m}{m!}.$$

Enfin, sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on définit les deux variables aléatoires $X(n,m) = n$ et $Y(n,m) = m$.

a) Vérifier que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Déterminer la loi de $X$ et la loi de $Y$.

c) Déterminer la loi de $X + Y$.

**9.** Soient $\lambda > 0$ et $p \in [0,1]$ deux réels. On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^2$, la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ et, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$, la probabilité $\mathbb{P}$ caractérisée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\{(n,k)\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{1}_{k \leq n}.$$

Enfin, sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on définit les deux variables aléatoires $X(n,k) = n$ et $Y(n,k) = k$.

a) Vérifier que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Déterminer la loi de $X$ et la loi de $Y$.