Université Pierre et Marie Curie | 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 | Feuille 6

Vecteurs aléatoires.

1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\exp X$. *Cette loi s'appelle la loi* log-normale*, car c'est la loi d'une variable aléatoire dont le logarithme suit une loi normale.*

2. Soient μ et $\sigma \geq 0$ deux nombres réels. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Calculer la loi de $\sigma X + \mu$. En déduire l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

3. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer les lois de X, Y, $X+Y$, X^2+Y^2.

4. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

5. Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que X suive la loi de Bernoulli de paramètre p et Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer qu'on a

$$\max(p+q-1, 0) - pq \leq \mathrm{Cov}(X,Y) \leq \min(p,q) - pq$$

et que les deux bornes de cette égalité peuvent être atteintes.

6. Calculer, pour tous n, a, b entiers, les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx \text{ et } J_{a,b} = \int_0^1 t^a (1-t)^b \, dt.$$

7. a. Soient $\theta > 0$ un nombre réel et $k, l \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c x^{k-1} y^{l-1} e^{-\theta(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x,y)$$

soit la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de X. *Cette loi s'appelle la loi Gamma de paramètres* θ *et* k *: on écrit* $X \sim \Gamma(\theta, k)$. Quelle est cette loi lorsque $k = 1$?

b. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité décrite à la question précédente. Déterminer la loi de $X + Y$.

8. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X définie sur l'espace $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \mathsf{Leb})$ par

$$\forall t \in [0,1],\ X(t) = \begin{cases} -\log(2x) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Existe-t-il une partie dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ telle que $X \in D$ presque sûrement ? La loi de X admet-elle une densité ?

9. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont chaque composante est de carré intégrable. On appelle *matrice de dispersion* de X la matrice $D = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1\ldots n}$. Montrer que cette matrice est symétrique et positive, au sens où pour tout vecteur ligne $A = (a_1, \ldots, a_n)$ de n réels, on a l'inégalité

$$AD\,{}^t\!A = \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j \geq 0.$$