Vecteurs aléatoires.

1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\exp X$. *Cette loi s'appelle la loi* log-normale*, car c'est la loi d'une variable aléatoire dont le logarithme suit une loi normale.*

Solution de l'exercice 1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Calculons $\mathbb{E}[g(e^X)]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(e^X)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^x) e^{-\frac{1}{2}(\log(e^x))^2} e^{-x}\, e^x dx.\end{aligned}$$

L'application $x \mapsto e^x$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On change de variable en posant $t = e^x$ et on trouve

$$\mathbb{E}[g(e^X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(t) e^{-\frac{1}{2}(\log(t))^2} \frac{1}{t}\, dt.$$

La loi de e^X est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f_{e^X}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\log(t))^2}}{\sqrt{2\pi} t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

2. Soient μ et $\sigma \geq 0$ deux nombres réels. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Calculer la loi de $\sigma X + \mu$. En déduire l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Solution de l'exercice 2. Si $\sigma = 0$, la loi de $\sigma X + \mu$ est la masse de Dirac en μ. Supposons donc $\sigma > 0$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons l'espérance de $g(\sigma X + \mu)$ en utilisant le théorème de transfert. On trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(\sigma X + \mu)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},\end{aligned}$$

où nous avons fait le changement de variable $t = \sigma x + \mu$. Ce calcul montre que $\sigma X + \mu$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Cette loi est d'espérance $\mathbb{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \mathbb{E}[X] + \mu = \mu$ et de variance $\mathrm{Var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Il est légitime d'appeler la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer les lois de X, Y, $X + Y$, $X^2 + Y^2$.

Solution de l'exercice 3. La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet la densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La loi de X est donc la loi normale centrée réduite. La loi de Y est égale à celle de X.

Pour calculer la loi de $X + Y$, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculons $\mathbb{E}[g(X + Y)]$:

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x + y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy.$$

Faisons le changement de variable $(u, v) = (x+y, x-y)$, c'est-à-dire $(x, y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$. Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

On a $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, donc

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\, dudv.$$

On peut intégrer par rapport à v en utilisant la relation $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{4}}\, dv = 2\sqrt{\pi}$, et on trouve

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-\frac{u^2}{4}}\, du,$$

donc $X + Y$ suit la loi normale centrée de variance 2 : on écrit $X + Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$. On observe qu'on a également $X - Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

Déterminons enfin la loi de $X^2 + Y^2$. On procède de la même manière que pour déterminer la loi de $X + Y$. On fait cependant un autre changement de variables : on passe en coordonnée polaires, écrivant $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. L'application qui à (r, θ)

associe (x, y) est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dont le jacobien vaut

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| = r.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X^2+Y^2)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*} dr \int_0^{2\pi} d\theta g(r^2)re^{-\frac{r^2}{2}} \\
&= \int_0^{+\infty} g(r^2)e^{-\frac{r^2}{2}}\,rdr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(t)e^{-\frac{t}{2}}\,dt,
\end{aligned}$$

où nous sommes passés de l'avant-dernière ligne à la dernière en faisant le changement de variable $t = r^2$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, $X^2 + Y^2 \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

4. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$. Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

Solution de l'exercice 4. Puisque le vecteur aléatoire (X, Y) admet une densité, chacune des variables X et Y admettent une densité, qu'on peut calculer respectivement par les formules $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$ et $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$. On trouve

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Ainsi, X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Le même calcul en échangeant x et y montre que Y suit également la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour calculer la loi de Z, considérons une fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et calculons, grâce au théorème de transfert, l'espérance de $g(Z)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Z)] &= \mathbb{E}[g(XY)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(xy)f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{[0,1]^2} g(xy)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue un changement de variables. On pose $t = xy$ et on cherche une autre variable u qui dépende de x et de y et telle que l'application $(x, y) \mapsto (t(x, y), u(x, y))$ soit bijective, de classe C^1 et admette une réciproque de classe

C^1. Posons $u(x,y) = x$. On peut retrouver x et y à partir de t et u puisque $x = u$ et $y = \frac{t}{u}$. Notons que nous devons nous restreindre à $(x,y) \in]0,1] \times [0,1]$ pour assurer que u ne soit pas nul, mais cela nous suffit puisque c'est, à un ensemble négligeable près, le domaine sur lequel nous intégrons.

Déterminons le domaine dans lequel (t,u) varie lorsque (x,y) décrit $]0,1[^2$ (considérer ce domaine encore un peu plus petit ne change rien à l'intégrale et simplifie le calcul du domaine de (t,u)). On a $u = x \in]0,1[$ et $t = xy \in]0,x[=]0,u[$. Ainsi, $(t,u) \in D = \{(a,b) \in]0,1[^2 \colon a < b\}$. De plus, pour tout (t,u) dans le domaine D, le couple $(x(t,u), y(t,u)) = (u, \frac{t}{u})$ appartient à $]0,1[^2$.

Calculons, pour tout $(t,u) \in D$, le jacobien de la transformation $(t,u) \mapsto (x(t,u), y(t,u))$. Il vaut

$$\frac{D(x,y)}{D(t,u)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{t}{u^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables dans l'intégrale, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Z)] &= \int_{[0,1]^2} g(xy)\ dxdy \\
&= \int_D g(t) \left| \frac{D(x,y)}{D(t,u)} \right|\ dtdu \\
&= \int_D g(t) \frac{1}{u}\ dtdu \\
&= \int_0^1 \int_0^1 g(t) \frac{1}{u} \mathbb{1}_{t<u}\ dtdu \\
&= \int_0^1 g(t) \left(\int_0^1 \frac{1}{u} \mathbb{1}_{t<u}\ du \right)\ dt \\
&= \int_0^1 g(t) \left(\int_t^1 \frac{1}{u}\ du \right)\ dt \\
&= \int_0^1 g(t)(-\log t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \underbrace{(-\log t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)}_{\text{Densité de la loi de } Z}\ dt.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire $Z = XY$ a donc une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $f_Z(t) = (-\log t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

5. Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que X suive la loi de Bernoulli de paramètre p et Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer qu'on a

$$\max(p+q-1, 0) - pq \leq \operatorname{Cov}(X,Y) \leq \min(p,q) - pq$$

et que les deux bornes de cette égalité peuvent être atteintes.

Solution de l'exercice 5. On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - pq$. Il nous faut donc encadrer $\mathbb{E}[XY]$.

D'une part, $XY \leq X$ donc $\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X] = p$. De même, $\mathbb{E}[XY] \leq q$. Ainsi, $\mathbb{E}[XY] \leq \min(p,q)$.

D'autre part, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1)$. Or pour tous événements A et B, l'égalité $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$ et l'inégalité $\mathbb{P}(A\cup B) \leq 1$ entraînent $\mathbb{P}(A\cap B) \geq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$. Comme de plus $\mathbb{P}(A\cap B) \geq 0$, on a $\mathbb{P}(A\cap B) \geq \max(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1, 0)$. Avec $A = \{X=1\}$ et $B=\{Y=1\}$, on trouve $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{P}(A\cap B) \geq \max(p+q-1,0)$. On a ainsi établi l'inégalité voulue.

Montrons que les deux bornes peuvent être atteintes pour tous p et q. Supposons $p \leq q$. Si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1) = q-p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=0) = 1-q,$$

alors X et Y suivent respectivement des lois de Bernoulli de paramètres p et q et $\mathrm{Cov}(X,Y) = \min(p,q) - pq$.

Pour la borne inférieure, distinguons deux cas suivant le signe de $p+q-1$. Supposons tout d'abord $p+q<1$. Alors si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0) = p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1) = q,\ \mathbb{P}(X=0,Y=0) = 1-p-q,$$

les lois de X et Y sont les bonnes et $\mathrm{Cov}(X,Y) = -pq$.

Enfin, si $p+q \geq 1$ et si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0) = 1-q,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1) = 1-p,\ \mathbb{P}(X=1,Y=1) = p+q-1,$$

alors les lois de X et Y sont les bonnes et $\mathrm{Cov}(X,Y) = p+q-1-pq$.

6. Calculer, pour tous n, a, b entiers, les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx \text{ et } J_{a,b} = \int_0^1 t^a(1-t)^b\, dt.$$

Solution de l'exercice 6. On a $I_0 = 1$ et, en intégrant I_n par parties lorsque $n \geq 1$, $I_n = nI_{n-1}$. On a donc, pour tout $n \geq 0$, $I_n = n!$.

Pour calculer J, on procède également par intégration par parties. Observons tout d'abord que pour tout $a \geq 0$, on a $J_{a,0} = \frac{1}{a+1}$. Par ailleurs, si $b \geq 1$, en intégrant t^a et en dérivant $(1-t)^b$, on trouve $J_{a,b} = \frac{b}{a+1} J_{a+1,b-1}$. Ainsi, on obtient, par récurrence,

$$J_{a,b} = \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+b}J_{a+b,0} = \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+b}\frac{1}{a+b+1} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

7. a. Soient $\theta > 0$ un nombre réel et $k, l \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}(x, y)$$

soit la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de X. *Cette loi s'appelle la loi Gamma de paramètres θ et k : on écrit $X \sim \Gamma(\theta, k)$.* Quelle est cette loi lorsque $k = 1$?

b. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité décrite à la question précédente. Déterminer la loi de $X + Y$.

Solution de l'exercice 7. a. S'il existe, ce réel c est l'unique réel tel que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit positive et telle que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaille 1. N'importe quel c positif rend la fonction $f_{(X,Y)}$ positive. Pour que son intégrale vaille 1, il faut que

$$1 = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\, dxdy = c\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-\theta x}\, dx \int_0^{+\infty} y^{l-1}e^{-\theta y}\, dy.$$

On vérifie aisément, par récurrence sur $n \geq 0$ et en utilisant une intégration par parties pour passer d'un rang au suivant, que

$$\forall n \geq 0, \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!.$$

Par un changement de variables linéaires, on en déduit que les intégrales que nous devons calculer valent respectivement $(k-1)!\theta^{-k}$ et $(l-1)!\theta^{-l}$. Ainsi, l'unique valeur de c qui convient est $c = \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}$.

La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \frac{\theta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\theta x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Pour $k = 1$, on reconnaît la loi exponentielle de paramètre θ.

b. On fait, comme à l'exercice précédent, le changement de variables $(x, y) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$, de sorte que $x + y = u$ et $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X + Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}\int_{\mathbb{R}^2} g(x + y)x^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}\, dxdy \\ &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}^2} g(u)(u + v)^{k-1}(u - v)^{l-1}e^{-\theta u}\mathbb{1}_{\{u+v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u-v\geq 0\}}\, dudv \\ &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_0^{+\infty} g(u)e^{-\theta u}\left(\int_{-u}^{u}(u + v)^{k-1}(u - v)^{l-1}\, dv\right)\, du,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les conditions $u+v \geq 0$ et $u-v \geq 0$ équivalent aux conditions $u \geq 0$ et $|v| \leq u$. Une suite de $l-1$ intégrations par parties permet d'établir l'égalité

$$\begin{aligned}
\int_{-u}^{u} (u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}\, dv &= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!} \int_{-u}^{u} (v+u)^{k+l-2}\, dv \\
&= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!} \int_{0}^{2u} v^{k+l-2}\, dv \\
&= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!} 2^{k+l-1} u^{k+l-1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}} \int_0^{+\infty} g(u) e^{-\theta u} \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!} 2^{k+l-1} u^{k+l-1}\, du \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k+l-1)!} \int_0^{+\infty} g(u) u^{k+l-1} e^{-\theta u}\, du.
\end{aligned}$$

Ainsi, $X+Y$ suit une loi Gamma de paramètres θ et $k+l$.

8. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X définie sur l'espace $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \mathsf{Leb})$ par

$$\forall t \in [0,1],\ X(t) = \begin{cases} -\log(2x) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Existe-t-il une partie dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ telle que $X \in D$ presque sûrement ? La loi de X admet-elle une densité ?

Solution de l'exercice 8. On calcule la fonction de répartition de X. Pour tout $x < 0$, on a $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$. Pour $x = 0$, on trouve $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathsf{Leb}(]\frac{1}{2}, 1]) = \frac{1}{2}$. Pour $x > 0$, on a $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathsf{Leb}([\frac{1}{2}e^{-x}, 1]) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$. Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, $F_X = \frac{1}{2}(F_{\delta_0} + F_\eta)$, où $\eta(dx) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx$ est la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$. Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Si 0 appartient à D, on a $\mathbb{P}(X \in D) = \frac{1}{2}$, sinon $\mathbb{P}(X \in D) = 0$. Dans aucun cas on n'a $\mathbb{P}(X \in D) = 1$. La variable aléatoire X n'est donc pas une variable aléatoire discrète.

Par ailleurs, le singleton $\{0\}$, qui est de mesure de Lebesgue nulle, a une masse $\frac{1}{2}$ sous la loi de X. Ainsi, la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et n'admet en particulier pas de densité.

Finalement, X n'est ni une variable discrète ni une variable à densité.

9. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont chaque composante est de carré intégrable. On appelle *matrice de dispersion* de X la matrice $D = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1\ldots n}$. Montrer que cette matrice est symétrique et positive, au sens où pour tout vecteur ligne $A = (a_1, \ldots, a_n)$ de n réels, on a l'inégalité

$$AD\,{}^tA = \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j \geq 0.$$

Solution de l'exercice 9. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Calculons la somme dont nous voulons montrer qu'elle est positive, en écrivant la définition de la matrice D puis de la covariance, puis la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}(X_i, X_j) a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[a_i (X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i (X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - E[X_i]) \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - E[X_i])\right)^2\right].
\end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable : c'est donc un nombre réel positif.