Suites de variables aléatoires.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ elle a lieu.

a. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

b. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers 0.

c. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que si la suite X_n converge simultanément vers deux variables aléatoires X et Y, alors $X = Y$ presque sûrement, et ceci quel que soit le mode de convergence vers X et quel que soit le mode de convergence vers Y, parmi : convergence presque sûre, convergence dans L^p avec $p \in \{1, 2\}$, convergence en probabilité.

3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $X, X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X.

a. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ telle que pour tout $k \geq 1$ on ait

$$\mathbb{P}\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

b. Pour tout $k \geq 1$, on pose $Y_k = X_{n_k}$ (on dit que la suite $(Y_k)_{k\geq 1}$ est *extraite* de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$). Montrer que la suite $(Y_k)_{k\geq 1}$ converge presque sûrement vers X.

On a montré que d'une convergence en probabilité on pouvait extraire une convergence presque sûre.

4. *Lemme de Borel-Cantelli.* Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty.$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

On rappelle que $\limsup A_n := \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n = \{\omega \in \Omega : \{n : \omega \in A_n\} \text{estinfini}\}$.

5. Soit X une variable aléatoire positive sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

a. Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] < +\infty.$$

b. Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] < +\infty.$$

6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires toutes de même loi.

a. Montrer qu'on a $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

b. Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$, alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$. Étudier la réciproque.

c. Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$, alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Étudier la réciproque.

7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de carré intégrable.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 + \mathrm{Var}(X_n).$$

b. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers une constante a si et seulement si on a les convergences

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = a \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire X, alors la suite $(X_n^2)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers X^2. La réciproque est-elle vraie ?

9. *Lemme de Borel-Cantelli (suite).* Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants telle que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty.$$

On veut démontrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

a. Montrer que pour tout réel x, on a l'inégalité $1 + x \leq e^x$.

b. Montrer que pour tous entiers n, m tels que $1 \leq m \leq n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^{n} A_k^c\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right).$$

c. En déduire que pour tout $m \geq 1$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c\right) = 0$, puis conclure.

10. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer qu'avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0.

11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$. On veut montrer que presque sûrement, la suite $\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite réelle.

a. Montrer que si une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels est telle que la suite $\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ ait une limite réelle, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0.$$

b. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$ et conclure.