Université Pierre et Marie Curie 2010-2011
Probabilités et statistiques - LM345 Feuille 9

Suites de variables aléatoires.

Rappel. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. S'il existe un majorant de A, c'est-à-dire un réel M tel que pour tout $x \in A$ on ait $x \leq M$, alors il existe un majorant de A qui est plus petit que tous les autres [1]. On l'appelle *borne supérieure* de A et on le note $\sup A$. Ainsi, pour une partie A non vide et majorée, $\sup A$ est l'unique réel S tel que

(1). pour tout $x \in A$, on a $x \leq S$,

(2). si M est un réel tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$, alors $S \leq M$.

Si A n'est pas majorée, c'est-à-dire si aucun réel n'est plus grand que tous les éléments de A, on convient de poser $\sup A = +\infty$. Enfin, on convient que $\sup \varnothing = -\infty$.

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit S un réel. Montrer que $\sup A = S$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(i). pour tout $x \in A$, on a $x \leq S$,

(ii). pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Pour tout $p \geq 1$, on pose $s_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$.

a. Montrer que la suite $(s_p)_{p\geq 1}$ est monotone, puis qu'on peut toujours lui attribuer une limite dans $[-\infty, +\infty]$.

On appelle cette limite la *limite supérieure* de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et on la note $\overline{\lim}\, a_n$.

b. À quelles conditions sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ a-t-on $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$? Et $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$?

c. Que vaut $\overline{\lim}\, a_n$ si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente ?

d. Montrer que si la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ est extraite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire s'il existe une suite $n_1 < n_2 < \ldots$ strictement croissante d'entiers telle que pour tout $k \geq 1$ on ait $b_k = a_{n_k}$, alors $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

e. Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\overline{\lim}\, a_n$.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Soit c un réel.

a. Montrer que $\overline{\lim}\, a_n > c$ si et seulement s'il existe un réel $c' > c$ tel qu'on ait $a_n > c'$ pour une infinité de n.

b. Montrer que $\overline{\lim}\, a_n < c$ si et seulement s'il existe un réel $c' < c$ tel que $a_n < c'$ pour n assez grand.

c. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que $X = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ est une variable aléatoire, c'est-à-dire que pour tous a, b réels avec $a < b$, la partie $\{\omega \in \Omega : a <$

1. Cette affirmation n'est pas une évidence, c'est un théorème, en fait le théorème fondamental de l'analyse réelle. Pour le démontrer, il faut examiner la définition de l'ensemble (ordonné) des nombres réels.

$X < b\}$ est un événement.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1.

a. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}\,\dfrac{X_n}{\log n} > 1\right) = 0$.

On suppose désormais $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes.

b. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}\,\dfrac{X_n}{\log n} < 1\right) = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux sans l'hypothèse d'indépendance.

c. Montrer que $\overline{\lim}\,\frac{X_n}{\log n}$ est presque sûrement égale à une constante que l'on déterminera.

d. Montrer que $\underline{\lim}\,X_n$ est presque sûrement égale à 0.

5. a. Montrer qu'une suite de réels converge vers un réel l si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers l.

b. Montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers X.

c. Montrer que si une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles converge en probabilité vers une variable aléatoire X, et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la suite $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $f(X)$.