Suites de variables aléatoires.

Rappel. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. S'il existe un majorant de A, c'est-à-dire un réel M tel que pour tout $x \in A$ on ait $x \leq M$, alors il existe un majorant de A qui est plus petit que tous les autres [1]. On l'appelle *borne supérieure* de A et on le note $\sup A$. Ainsi, pour une partie A non vide et majorée, $\sup A$ est l'unique réel S tel que

(1). pour tout $x \in A$, on a $x \leq S$,

(2). si M est un réel tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$, alors $S \leq M$.

Si A n'est pas majorée, c'est-à-dire si aucun réel n'est plus grand que tous les éléments de A, on convient de poser $\sup A = +\infty$. Enfin, on convient que $\sup \varnothing = -\infty$.

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit S un réel. Montrer que $\sup A = S$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(i). pour tout $x \in A$, on a $x \leq S$,

(ii). pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$.

Solution de l'exercice 1. Les assertions (1) et (i) sont identiques. (ii) qui énonce que "tout majorant M de A est plus que S" est précisément la contraposée de (2) qui affirme que "si $M = S - \varepsilon$ est strictement inférieur à S, ce ne peut être un majorant" et lui est donc équivalente.

D'où l'équivalence demandée.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Pour tout $p \geq 1$, on pose $s_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$.

a. Montrer que la suite $(s_p)_{p\geq 1}$ est monotone, puis qu'on peut toujours lui attribuer une limite dans $[-\infty, +\infty]$.

On appelle cette limite la *limite supérieure* de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et on la note $\overline{\lim}\, a_n$.

b. À quelles conditions sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ a-t-on $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$? Et $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$?

c. Que vaut $\overline{\lim}\, a_n$ si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente ?

d. Montrer que si la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ est extraite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire s'il existe une suite $n_1 < n_2 < \dots$ strictement croissante d'entiers telle que pour tout $k \geq 1$ on ait $b_k = a_{n_k}$, alors $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

e. Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\overline{\lim}\, a_n$.

Solution de l'exercice 2. a. La suite d'ensembles $(\{a_n : n \geq p\})_{p\geq 1}$ est décroissante au sens de l'inclusion. Son sup est donc lui aussi décroissant [2], et par conséquent il admet

1. Cette affirmation n'est pas une évidence, c'est un théorème, en fait le théorème fondamental de l'analyse réelle. Pour le démontrer, il faut examiner la définition de l'ensemble (ordonné) des nombres réels.

2. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, alors $\sup B$ majore A et donc est plus grand que $\sup A$.

une limite dans $[-\infty, +\infty]$ d'après le théorème de la limite monotone.

b. $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ signifie que $s_p \to -\infty$. Autrement dit, pour tout $A > 0$, pour tout p assez grand, on a $s_p \leq -A$, i.e. $\forall n \geq p, a_n \leq -A$. $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ équivaut donc à $\lim a_n = -\infty$.

$\overline{\lim}\, a_n = +\infty$ signifie que $s_p \to +\infty$. Comme cette suite est décroissante, cela implique en fait que $s_p = +\infty$ pour tout $p \geq 1$. Autrement dit, que la suite a_n est non bornée. De plus, on vérifie facilement la réciproque. Donc $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$ équivaut à a_n non majorée.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Soit c un réel.

a. Montrer que $\overline{\lim}\, a_n > c$ si et seulement s'il existe un réel $c' > c$ tel qu'on ait $a_n > c'$ pour une infinité de n.

b. Montrer que $\overline{\lim}\, a_n < c$ si et seulement s'il existe un réel $c' < c$ tel que $a_n < c'$ pour n assez grand.

c. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que $X = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ est une variable aléatoire, c'est-à-dire que pour tous a, b réels avec $a < b$, la partie $\{\omega \in \Omega : a < X < b\}$ est un événement.

Solution de l'exercice 3. a. Supposons $\overline{\lim}\, a_n > c$. Il existe une sous-suite de $(a_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\overline{\lim}\, a_n$. Soit $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ une telle sous-suite. Soient c' et c'' tels que $c < c' < c'' < \overline{\lim}\, a_n$. Le fait que la suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers $\overline{\lim}\, a_n$ assure que pour k assez grand, on a $a_{n_k} \geq c'' > c'$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ a une infinité de termes strictement supérieurs à c'.

Réciproquement, supposons qu'il existe $c' > c$ et une infinité de n tels que $a_n > c'$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ possède donc une sous-suite $(b_k)_{k\geq 1}$ dont tous les termes sont strictement supérieurs à c'. Toute valeur d'adhérence de cette sous-suite est donc supérieure ou égale à c'. Par ailleurs, toute valeur d'adhérence de $(b_k)_{k\geq 1}$ est aussi une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\geq 1}$. Ainsi, $\overline{\lim}\, a_n \geq \overline{\lim}\, b_k \geq c' > c$.

b. Supposons $a_n < c'$ pour n assez grand. Alors toute suite extraite de a_n est bornée asymptotiquement par c', donc toute limite de suite extraite de a_n est inférieure ou égale à c'. Ainsi, $\overline{\lim}\, a_n \leq c' < c$.

Supposons maintenant que pour tout $c' < c$ il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ qui soient supérieurs ou égaux à c'. Il existe donc $n_1 \geq 1$ tel que $a_{n_1} \geq c - 1$. Il existe ensuite $n_2 > n_1$ tel que $a_{n_2} \geq c - \frac{1}{2}$. Par récurrence, on construit une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que pour tout $k \geq 1$ on ait $a_{n_k} \geq c - \frac{1}{k}$. Toute valeur d'adhérence de la suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ est d'une part une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et d'autre part la limite d'une suite convergente qui est supérieure à une suite qui converge vers c, donc elle-même supérieure à c. Autrement dit, $\underline{\lim}\, a_{n_k} \geq \underline{\lim}\, c - \frac{1}{k} = c$. À plus forte raison, $\overline{\lim}\, a_n \geq \overline{\lim}\, a_{n_k} \geq c$. Ceci établit la contraposée de l'assertion qu'on voulait démontrer.

c. Soient a, b des réels tels que $a < b$. On a

$$\begin{aligned}
\{a < X < b\} &= \{X > a\} \cap \{X < b\} \\
&= \left(\bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \to \infty} \left\{ X_n > a + \frac{1}{k} \right\} \right) \cap \left(\bigcup_{k \geq 1} \liminf_{n \to \infty} \left\{ X_n < b - \frac{1}{k} \right\} \right) \\
&= \left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{n \geq p} \left\{ X_n > a + \frac{1}{k} \right\} \right) \cap \left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{n \geq p} \left\{ X_n < b - \frac{1}{k} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Cette écriture montre que l'ensemble $\{a < X < b\}$, formé à partir d'événements par unions et intersections dénombrables, est lui-même un événement.

4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1.

a. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim} \dfrac{X_n}{\log n} > 1 \right) = 0$.

On suppose désormais $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes.

b. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim} \dfrac{X_n}{\log n} < 1 \right) = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux sans l'hypothèse d'indépendance.

c. Montrer que $\overline{\lim} \frac{X_n}{\log n}$ est presque sûrement égale à une constante que l'on déterminera.

d. Montrer que $\underline{\lim}\, X_n$ est presque sûrement égale à 0.

Solution de l'exercice 4. a. D'après l'exercice 3, on a

$$\begin{aligned}
\left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{\log n} > 1 \right\} &= \bigcup_{k \geq 1} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \text{ infiniment souvent } \right\} \\
&= \bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right\}.
\end{aligned}$$

Pour tous $n, k \geq 1$, on a, puisque X_n suit la loi exponentielle de paramètre 1,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right) = \mathbb{P}\left(X_n > \log\left(n^{1+\frac{1}{k}} \right) \right) = e^{-\log\left(n^{1+\frac{1}{k}} \right)} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Pour tout $k \geq 1$, ce nombre est, en fonction de n, le terme général d'une série convergente, donc

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right) < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure donc que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right\} \right) = 0.$$

Puisqu'une union dénombrable d'événements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim}\frac{X_n}{\log n} > 1\right) = 0.$$

b. D'après l'exercice 3 encore,

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\lim}\frac{X_n}{\log n} < 1\right\} &= \bigcup_{k\geq 1}\left\{\frac{X_n}{\log n} < 1 - \frac{1}{k} \text{ pour } n \text{ assez grand}\right\}\\ &= \bigcup_{k\geq 1}\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\log n} < 1 - \frac{1}{k}\right\}\\ &= \bigcup_{k\geq 1}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right\}\right)^c.\end{aligned}$$

Pour tous $n, k \geq 1$, on a, d'après le même calcul que précédemment,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}},$$

si bien que

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes, la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli entraîne

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right\}\right) = 1,$$

d'où il découle que

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim}\frac{X_n}{\log n} < 1\right) = 0.$$

Si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \geq 1$, auquel cas l'hypothèse d'indépendance serait mise en défaut, on aurait $\frac{X_n}{\log n} = \frac{X_1}{\log n}$ qui tendrait vers 0 presque sûrement. En particulier, on aurait $\overline{\lim}\,\frac{X_n}{\log n} = 0$ presque sûrement.

c. Puisque $\mathbb{P}(\overline{\lim}\,\frac{X_n}{\log n} < 1) + \mathbb{P}(\overline{\lim}\,\frac{X_n}{\log n} > 1) + \mathbb{P}(\overline{\lim}\,\frac{X_n}{\log n} = 1) = 1$, il découle des résultats précédents que $\overline{\lim}\,\frac{X_n}{n}$ est presque sûrement égale à 1.

d. Soit (a_n) une suite de réels. D'après la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli, il suffit, pour qu'on ait $X_n < a_n$ infiniment souvent, d'avoir $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X_n < a_n) = +\infty$. Or, pour a voisin de 0, on a $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = a + O(a^2)$. Il suffit donc d'avoir $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. On peut donc prendre $a_n = \frac{1}{n}$.

L'événement $\{X_n \leq \frac{1}{n}$ infiniment souvent$\}$ est donc de probabilité 1. Sur cet événement, $\underline{\lim}\, X_n = 0$, donc $\underline{\lim}\, X_n = 0$ presque sûrement.

Ici encore, si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \geq 1$, on aurait $\underline{\lim} X_n = X_1$ presque sûrement, qui n'est pas la variable aléatoire nulle.

5. a. Montrer qu'une suite de réels converge vers un réel l si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers l.

b. Montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers X.

c. Montrer que si une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles converge en probabilité vers une variable aléatoire X, et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la suite $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Solution de l'exercice 5. a. Si une suite converge, alors toute sous-suite de cette suite converge vers la même limite. En particulier, si une suite converge vers l, toute suite extraite d'une sous-suite de cette suite converge vers l.

Soit maintenant $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels qui ne converge pas vers l. Alors par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|a_n - l| > \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ possède une infinité de termes qui sont à distance supérieure à ε de l. On peut donc extraire une suite $(b_k)_{k\geq 1} = (a_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$ on ait $|b_k - l| > \varepsilon$. Toute limite β d'une sous-suite de la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ vérifie donc $|\beta - l| \geq \varepsilon$. En particulier, il est impossible d'extraire de la sous-suite $(b_k)_{k\geq 1}$ une sous-sous-suite qui converge vers l.

b. Si une suite de variables aléatoires converge en probabilité, alors toute sous-suite de cette suite converge en probabilité vers la même limite.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui ne converge pas en probabilité vers X. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ ne tende pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On peut donc trouver $\alpha > 0$ et une suite croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers tels que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) > \alpha$. De la sous-suite $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ on ne peut extraire aucune sous-suite qui converge en probabilité vers X.

c. On utilise le critère précédent et le fait que d'une suite convergente en probabilité on peut extraire une suite qui converge presque sûrement vers la même limite. Soit $(f(X_{n_k}))_{k\geq 1}$ une suite extraite de la suite $(f(X_n))_{n\geq 1}$. La suite $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ converge en probabilité vers X. On peut donc en extraire une sous-suite $(X_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ qui converge presque sûrement vers X. Puisque la fonction f est continue, la suite $(f(X_{n_{k_l}}))_{l\geq 1}$ converge vers $f(X)$ sur l'événement où $(X_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ converge vers X, donc presque sûrement. En particulier, la suite $(f(X_{n_{k_l}}))_{l\geq 1}$ converge vers $f(X)$ en probabilité.

Ainsi, la suite $(f(X_n))_{n\geq 1}$ elle-même converge en probabilité vers $f(X)$.