

TP MAPLE 3, analyse : séries, intégrale à paramètres, développements limités¹

Exercice 1. Un peu de statistiques

On prend $n = 1000$. Former une liste de n termes $a_i = i^2$ pour $i \in [1, n]$. Calculer le plus simplement possible la moyenne μ des éléments de cette liste ainsi que l'écart type

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \mu)^2}.$$

Exercice 2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général $u_n = (n^7 + 3n^6)^{1/7} - (P(n))^{1/3}$ soit convergente.

Exercice 3. Autour de la fonction Γ

1. Trouver avec Maple la définition intégrale de la fonction Γ (écrire Gamma).
2. Calculer $\Gamma(x + 1)$ en fonction $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3)$ et $\Gamma(\frac{1}{2})$.
4. Tracer la représentation graphique de $\Gamma(x)$ pour $x \in [0.1, 4]$.
5. Calculer la suite de nombre $\Gamma(i + 1) - i!$ pour i entier 0 à 10.
6. Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$ l'expression $\Gamma(\frac{1}{2} - n)\Gamma(\frac{1}{2} + n)$.
7. Tracer la représentation graphique de $\Gamma(x)$ pour $x \in [-5, 4]$.
8. Calculer l'abscisse de l'unique minimum de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$.
9. Calculer $-\frac{d\Gamma(z)}{dz}$ au point $z = 1$.
10. Calculer le développement asymptotique à l'ordre 1 de $\Gamma(1/x)$.

Exercice 4. Déterminer les réels a, b, c, d et e pour que la fonction réelle f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \cos(x) - \frac{a + bx^2 + cx^4}{1 + dx^2 + ex^4}$$

soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible au voisinage de 0. Déterminer alors un équivalent de f en 0.

Exercice 5. Etudier la fonction réelle f de la variable réelle

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt.$$

On fera une représentation graphique, une étude de limites et du sens de variation.

¹le corrigé sera mis en ligne à l'adresse <http://www.lsta.upmc.fr/doct/patra/>, un imprimé peut être obtenu sur simple demande.