

TP MAPLE 4 : Algèbre linéaire (matrice et réduction)¹

Exercice 1. Opérations élémentaires

1. Chargez le package `LinearAlgebra`.
2. Définissez les matrices suivantes (voir `Matrix`):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E = (1 \ 2).$$

3. Calculer $A + B$, $3A$, AC , EB , A^3 .
4. Définissez R_1 , R_2 des matrices aléatoires de tailles 5×7 et 7×5 , et $R = R_2 \times R_1$.
5. Définissez la matrice $H = (h_{i,j})$ de taille 10×10 avec $h_{i,j} = \frac{1}{i+j}$.
6. Définissez la matrice J donnée par les lignes impaires et les colonnes paires de H (voir `SubMatrix`).
7. Construire la matrice par blocs $K = [A, B]$.

Exercice 2. Calculs sur les matrices

1. Calculez la trace et le déterminant de A , B , R , H , J . Calculez l'inverse de celles qui sont inversibles.
2. Calculez le rang, une base du noyau, une base de l'image de A , R_1 , R_2 , R , K . (voir `Rank`, `NullSpace`, `ColumnSpace`) Comparez les résultats obtenus pour R_1 , R_2 , R , K lorsque cela a un sens.
3. Calculez le polynôme caractéristique de A , B , R , H (voir `CharacteristicPolynomial`).
4. Calculez les éléments propres de A et B (voir `Eigenvectors`).
5. Calculez une valeur approchée des valeurs propres de R et H . Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 3. Etude d'un opérateur linéaire

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f_M : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto XM - MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Ecrivez une procédure `Mat f` qui prend en entrée une matrice M de taille $n \times n$ et qui renvoie la matrice de taille $n^2 \times n^2$ de f_M dans la base canonique.
2. Calculez les valeurs propres de f_A et de f_B . Conjecturez une relation entre les valeurs propres de M et celles de f_M .
3. Testez la validité de votre conjecture pour R et H avec des valeurs approchées.

¹le corrigé sera mis en ligne à l'adresse <http://www.lsta.upmc.fr/doct/patra/>, un imprimé peut être obtenu sur simple demande.