Lycée Saint Louis MP2, année 2011-2012. Benoît Patra

TP MAPLE 5 : Algèbre linéaire : Réduction[1]

Exercice 1. Etude d'un opérateur linéaire
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f_M : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto XM - MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Ecrivez une procédure `Matf` qui prend en entrée une matrice M de taille $n \times n$ et qui renvoie la matrice de taille $n^2 \times n^2$ de f_M dans la base canonique.

2. Calculez les valeurs propres de f_A et de f_B. Conjecturez une relation entre les valeurs propres de M et celles de f_M.

3. Testez la validité de votre conjecture pour R et H avec des valeurs approchées.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient R_1, R_2 des matrices aléatoires de tailles 5×7 et 7×5, et $R = R2 \times R1$. $H = (h_{i,j})$ de taille 10×10 avec $h_{i,j} = \frac{1}{i+j}$.

Exercice 2. Un endomorphisme sur l'espace des polynômes
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg Q \leq 2$ et $d \geq 2$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_Q : & \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_d[X] \\ & P & \mapsto & X^d P\left(\frac{1}{X}\right) + P(x+1) + QP''. \end{array}$$

1. Vérifier que Φ_Q est bien définie et linéaire.

2. Ecrivez une procédure qui prend d, Q en entrée et qui renvoie la matrice de Φ_Q dans la base des $(X^n)_n$.

3. Testez votre procédure pour $d \in \{2, 3\}$, $Q \in \{0, X\}$ et vérifiez le résultat.

4. Calculez une valeur approchée des éléments propres de Φ_Q avec $d = 4$ et $Q = X^2 + X + 1$.

Exercice 3. Etude de quelques endomorphismes

1. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez les éléments propres de M_1. M_1 est-elle diagonalisable ? Trouvez une base dans laquelle est triangle supérieure, puis trouvez une base dans laquelle M_1 est triangulaire supérieure et dans laquelle le coefficient surdiagonal est 1.

2. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 35 & -116 \\ 10 & -33 \end{pmatrix}$. Calculez mes éléments propres de M_2. M_2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?
   Trouvez une base dans laquelle M_2 est de la forme $\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta \\ a\sin\theta & a\cos\theta \end{pmatrix}$.

3. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculez les éléments propres de M_3 et M_4. Sont-elles diagonalisables ? Peut-on conclure que M_3 et M_4 sont semblables ?
   (b) On appelle e_1 et e_3 deux vecteurs propres indépendants de M_3. Trouver deux vecteurs e_2 et e_4 tels que $M_3 e_2 = 3e_2 + e_1$ et $M_3 e_4 = 3e_4 + e_3$ (voir `LinearSolve`) et montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Que vaut la matrive de M_3 dans cette base ? Que vaut le polynôme minimal de M_3 ?

[1] le corrigé sera mis en ligne à l'adresse `http://www.lsta.upmc.fr/doct/patra/`, un imprimé peut être obtenu sur simple demande.

(c) On appelle f_1 et f_4 deux vecteurs propres indépendants de M_4. Trouver un vecteur f_2 tel que $M_4 f_2 = 3f_2 + f_i$ et un vecteur f_3 tel que $M_4 f_3 = 3f_3 + f_2$, où $i = 1$ ou 4. Si besoin, échangez f_1 et f_4 de sorte que $i = 1$. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Que vaut la matrice de M_4 dans cette base ? Que vaut le polynôme minimal de M_4 ?

(d) M_3 et M_4 sont-elles semblables ?